ΤΡΙΤΗ 24 ΜΑΙΟΥ 2011
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ Ε.Π.Α.Λ. (ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ. 84

Α2. α) Σ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Σ

Α3. α) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

β) $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

γ) $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

ΘΕΜΑ Β.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7 + 12}{x-4} & , \ x < 4 \\ \alpha & , \ x = 4 \\ \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3 & , \ x > 4 \end{cases}$$

Β1. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x-4} = \dfrac{4^2 - 7 \cdot 4 + 12}{4-4} = \dfrac{16 - 28 + 12}{4-4} = \dfrac{0}{0}$

Για το $x^2 - 7x + 12$ είναι:
$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} \dfrac{8}{2} = 4 \\ \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\cancel{(x-4)}(x-3)}{\cancel{x-4}} = \lim\limits_{x\to 4^-}(x-3) = 4-3 = 1$

B2.

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}\left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}-3\right) = \lim_{x\to 4^+}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - \lim_{x\to 4^+} 3 = \lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} - 3 = \lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^{\cancel{2}} - 2^2} - 3 =$$

$$= \lim_{x\to 4^+}\frac{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\cancel{x-4}} - 3 = \lim_{x\to 4^+}\left(\sqrt{x}+2\right) - 3 = \sqrt{4}+2-3 = 2+2-3 = 1$$

B3. Πρέπει $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4) \Rightarrow 1 = \alpha$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

[,)	K_i	ν_i	$K_i\nu_i$	N_i	$f_i\%$
[25,35)	30	7	210	7	17,5
[35,45)	40	12	480	19	30
[45,55)	50	15	750	34	37,5
[55,65)	60	6	360	40	15
Σύνολα	-	40	1800	-	100

Γ2.

$$\bar{x} = \frac{\sum K_i\nu_i}{\nu} = \frac{180\cancel{0}}{4\cancel{0}} = 45$$

Γ3.

Οι εργαζόμενοι που έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών είναι : 15 + 6 = 21

Γ4.

Το ποσοστό των εργαζομένων που έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών είναι 17,5%

ΘΕΜΑ Δ

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Δ1.

$A_f = R$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \overset{:3}{\Rightarrow} x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot1\cdot3 = 16 - 12 = 4$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \\ \dfrac{4-2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

	$-\infty$	1		3	$+\infty$
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗

(1)

Στο διάστημα $(-\infty, 1]$ η f γνησίως αύξουσα
Στο διάστημα $[1\ ,\ 3]$ η f γνησίως φθίνουσα
Στο διάστημα $[3\ ,+\infty)$ η f γνησίως αύξουσα

Δ2.
Η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό μέγιστο με τιμή

$f(1) = 1^3 - 6\cdot1 + 9\cdot1 + 1 \Rightarrow f(1) = 5$

και η f παρουσιάζει στο $x_0 = 3$ τοπικό ελάχιστο με τιμή

$f(3) = 3^3 - 6\cdot3^2 + 9\cdot3 + 1 \Rightarrow f(3) = \cancel{27} - \cancel{54} + \cancel{27} + 1 = 1$

Δ3.

$$I = \int_1^3 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 5 = -4$$

Δ4.

$g(x)=3x^2-12x+9=f'(x)$

$E=\int_0^3 |g(x)|dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^3 -g(x)dx$ **(2)**

$g(x)>0 \Rightarrow 3x^2-12x+9>0$

Από τον πίνακα (1) προκύπτει ότι στο διάστημα [0,3] η g(x)=f΄(x) αλλάζει πρόσημο δηλαδή

x	0		1		3	
g(x)		+	0	−	0	+

Από την **(2)** $=\int_0^1 f'(x)dx-\int_1^3 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1-\left[f(x)\right]_1^3=f(1)-f(0)-f(3)+f(1)=$ **(3)**

Είναι $f(1)=5$, $f(3)=1$, $f(0)=0^3-6\cdot 0+9\cdot 0+1=1$

Από την **(3)** $=2f(1)-f(0)-f(3)=2\cdot 5-1-1=10-2=8$τ.μ.

Επιμέλεια :

Μυλωνίδης Σ.
Τάνης Σ.