

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** απόδειξη σελ 260

**A2.** ορισμός Π.Α σελ 280

**A3.** α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

**B1.**

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

$$\text{Είναι } |z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \Rightarrow |z - 3i| + |\overline{z + 3i}| = 2 \Rightarrow |z - 3i| + |z - 3i| = 2 \Rightarrow 2|z - 3i| = 2 \Rightarrow |z - 3i| = 1$$

Είναι κύκλος με κέντρο  $K(0, 3)$  και ακτίνα  $\rho = 1$

**B2.**

$$\text{Είναι } \bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i} \Leftrightarrow (\bar{z} + 3i)(z - 3i) = 1 \Leftrightarrow \overline{(z + 3i)}(z - 3i) = 1 \Leftrightarrow |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1 \text{ ισχύει}$$

**B3.**

$$\left. \begin{array}{l} w = \alpha + \beta i \\ w \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} w = \alpha \\ \bar{w} = \alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow w = \bar{w}$$

Αρκεί να δείξω ότι:  $w = \bar{w}$

$$\bar{w} = \overline{z - 3i + \frac{1}{z - 3i}} = \bar{z} + 3i + \frac{1}{\bar{z} + 3i} = \frac{1}{z - 3i} + \frac{1}{\bar{z} + 3i} = \frac{1}{z - 3i} + z - 3i = w$$

Άρα ο  $w \in \mathbb{R}$

Β' τρόπος

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} \Rightarrow |w| = \left| z - 3i + \frac{1}{z - 3i} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Οπότε } \left| z - 3i + \frac{1}{z - 3i} \right| \leq \left| z - 3i \right| + \left| \frac{1}{z - 3i} \right| \Rightarrow |w| \leq |z - 3i| + \frac{1}{|z - 3i|} \Rightarrow |w| \leq 1 + \frac{1}{1} \Rightarrow |w| \leq 2 \\ \text{Επειδή } w \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \leq w \leq 2$$

**B4.**

$$|z-w| = \left| z - z + 3i - \frac{1}{z-3i} \right| = \left| 3i - \frac{1}{z-3i} \right| \stackrel{B2}{=} \left| 3i - \bar{z} - 3i \right| = |-\bar{z}| = |\bar{z}| = |z|$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**

$$\text{Είναι } e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = (xf''(x) + f'(x))' \Leftrightarrow$$

$$(e^x)' f'(x) + e^x (f'(x))' - (e^x)' = (xf''(x))' \Leftrightarrow$$

$$(e^x f'(x))' - (e^x)' = (xf''(x))' \Leftrightarrow$$

$$(e^x f'(x) - e^x)' = (xf''(x))' \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x = xf''(x) + c$$

Για  $x=0$  έχουμε:

$$e^0 f'(0) - e^0 = 0 + c \Leftrightarrow 0 - 1 = c \Leftrightarrow c = -1$$

$$\text{Άρα: } e^x f'(x) - e^x = xf''(x) - 1 \Leftrightarrow e^x f'(x) - xf''(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1 \quad (1)$$

Θέτουμε:  $g(x) = e^x - x$

$$\bullet g'(x) = e^x - 1$$

$$\bullet g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\bullet g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Ο.Ε

Η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για  $x=0$

$$\text{Το } g(0) = e^0 - 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\text{Άρα, για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } g(x) \geq 1 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0 \quad (2)$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^x - x} (e^x - 1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^x - x} (e^x - x)' \Leftrightarrow$$

Από

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left[ \ln(e^x - x) \right]' \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c$$

Για  $x=0$  έχουμε:  $f(0) = \ln 1 + c \Leftrightarrow 0 = c$

Άρα  $f(x) = \ln(e^x - x)$  με πεδίο ορισμού της  $f$   $A_f = \mathbb{R}$



**Γ2.**

$$f(x) = \ln(e^x - x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x - x} (e^x - x)' = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)			

Ο.Ε

Η  $f$  γνησίως φθίνουσα  $(-\infty, 0]$

Η  $f$  γνησίως αύξουσα  $[0, +\infty)$

Η  $f$  για  $x_0 = 0$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, το  $f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$

**Γ3.**

$$f''(x) = (f'(x))' = \left( \frac{e^x - 1}{e^x - x} \right)' = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} =$$

$$\frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{(e^{2x} - xe^x) - (e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x - x)^2} =$$

$$\frac{(e^{2x} - xe^x) - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$$



$$\bullet f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - xe^x - 1 = 0$$

$$\text{Θέτω: } \phi(x) = 2e^x - xe^x - 1$$

$$\phi'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = e^x(1 - x) \text{ είναι } e^x > 0$$

$$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$			

Ο.Μ

$$\phi(1) = 2e - e - 1 = e - 1 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2-x)e^x - 1] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2-x)e^x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [((2-x)e^x) - 1] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2-x}{e^{-x}} \right) - 1 \stackrel{\text{D'LEH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2-x)'}{(e^{-x})'} - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\text{Οπότε } \phi(A_1) = \phi([- \infty, 1]) \stackrel{(\phi \uparrow)}{=} \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x), \phi(1) \right] = [-1, e-1]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Το } 0 \in \phi(A_1) \\ \phi \uparrow A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{υπάρχει μοναδικό } x_1 \in (-\infty, 1) \text{ ώστε } : \phi(x_1) = 0 \Rightarrow f''(x_1) = 0$$

$$\bullet \text{ Επίσης } \phi(A_2) = \phi([1, +\infty]) \stackrel{(\phi \downarrow)}{=} \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x), \phi(1) \right] = (-\infty, e-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Το } 0 \in \phi(A_2) \\ \phi \downarrow A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{υπάρχει μοναδικό } x_2 \in [1, +\infty] \text{ ώστε } : \phi(x_2) = 0 \Leftrightarrow f''(x_2) = 0$$

Άρα,

$$\bullet \text{ Για } x < x_1 \stackrel{\phi \uparrow}{\Rightarrow} \phi(x) < \phi(x_1) \Rightarrow \phi(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$\bullet \text{ Για } x > x_1 \stackrel{\phi \uparrow}{\Rightarrow} \phi(x) > \phi(x_1) \Rightarrow \phi(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$






Άρα εκατέρωθεν του  $x_1$  αλλάζει το πρόσημο της  $f''(x)$

Όμοια:

$$\text{Για } \bullet x > x_2 \stackrel{\phi \downarrow}{\Rightarrow} \phi(x) < \phi(x_2) \Rightarrow \phi(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$\bullet x < x_2 \stackrel{\phi \downarrow}{\Rightarrow} \phi(x) > \phi(x_2) \Rightarrow \phi(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Άρα εκατέρωθεν του  $x_2$  αλλάζει το πρόσημο της  $\phi''$

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
		Σ.Κ	Σ.Κ		

Επομένως, υπάρχουν δύο  $x_1, x_2$  ώστε  $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$  και η  $f''(x)$  αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των  $x_1, x_2$  οπότε η  $C_f$  έχει δύο σημεία καμπής  $A(x_1, f(x_1))$  και  $B(x_2, f(x_2))$

#### Γ4.

$$\text{Είναι } \ln(e^x - x) = \sin x \Leftrightarrow \ln(e^x - x) - \sin x = 0$$

$$\text{Θέτουμε } K(x) = \ln(e^x - x) - \sin x$$

Για την  $K(x)$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  έχουμε

Η  $K(x)$  συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$K(0) = \ln(e^0 - 0) - \sin 0 = \ln 1 - 0 = 0 < 0$$

$$K\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{2} = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

$$\text{Διότι } e^x - x > 1 \Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} > 1 \Rightarrow \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > \ln 1 \Rightarrow \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ώστε:

$$K(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{x_0} - x_0) = \sin x_0$$

$$\text{Είναι } K'(x) = [\ln(e^x - x) - \sin x]' = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta \mu x$$

Για  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  έχουμε :

$$\left. \begin{array}{l} \eta \mu x > 0 \\ \text{Για } x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \\ \text{Είναι } e^x - x \geq 1 \text{ οπότε } e^x - x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow K'(x) > 0. \text{ Άρα η } K(x) \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Οπότε αφού η  $K(x)$  έχει τουλάχιστον 1 για ρίζα  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  και επειδή  $K(x)$  είναι γνησίως

αύξουσα στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , το  $x_0$  είναι μοναδική ρίζα στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

## ΘΕΜΑ Δ

$f, g$  συνεχείς:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

i)  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$

$$\text{ii) } \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

$$\text{iii) } \frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

Δ1.

$$\text{Έστω } I_1 = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

Θέτουμε

$$u = x + t \Leftrightarrow t = u - x$$

$$du = dt$$

$$\text{Για } t = 0 : u_1 = x$$

$$\text{Για } t = -x : u_2 = 0$$

$$\text{Άρα } I_1 = \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{e^{2x}} \frac{1}{g(u)} du$$

$$\text{Οπότε } \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \stackrel{\cdot e^{2x} > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = 1 - \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du + 1 \quad (1)$$

Η  $e^{2u}$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και η  $g(u)$  συνεχής στο  $\mathbb{R} \Rightarrow \frac{e^{2u}}{g(u)}$  συνεχής στο  $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων

$$\text{Έστω } I_2 = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

Θέτουμε

$$u = x + t \Leftrightarrow t = u - x$$

$$du = dt$$

$$\text{Για } t = 0 : u_1 = x$$

$$\text{Για } t = -x : u_2 = 0$$

$$\text{Άρα } I_2 = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{f(u)} du = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{e^{2x}} \frac{1}{f(u)} du = \frac{1}{e^{2x}} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{f(u)} du$$

$$\text{Οπότε } \frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{f(u)} du \Leftrightarrow g(x) = \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du + 1 \quad (2)$$

Ομοίως, η  $g(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  οπότε παραγωγίζω τις (1) και (2)

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \\ g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x)g(x) = e^{2x} \\ g'(x)f(x) = e^{2x} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \xrightarrow[\substack{f(x)>0 \\ g(x)>0}]{\Rightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ln f(x))' = (\ln g(x))' \Rightarrow \ln f(x) = \ln g(x) + c$$

Για  $x = 0$  είναι

$$\frac{1-f(0)}{e^0} = \int_0^0 \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt \Rightarrow 1-f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$\frac{1-g(0)}{e^0} = \int_0^0 \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt \Rightarrow 1-g(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 1$$

Άρα για  $x = 0$  είναι  $\ln f(0) = \ln g(0) + c \Rightarrow \ln 1 = \ln 1 + c \Rightarrow c = 0$

Οπότε  $\ln f(x) = \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

**Δ2.**

$$f'(x) = \left( \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du + 1 \right)' = \frac{e^{2x}}{g(x)} \stackrel{(f(x)=g(x))}{=} \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Rightarrow f'(x)f(x) = e^{2x} \Rightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Rightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})' \Rightarrow f^2(x) = e^{2x} + c$$

Για  $x = 0$  είναι  $f^2(0) = e^0 + c \Rightarrow 1 = 1 + c \Rightarrow c = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Άρα } f^2(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \pm e^x \\ \text{Αλλά } f(x) > 0, x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = e^x$$

**Δ3.**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}}$$

θέτω  $\frac{1}{x} = u$  και είναι  $u = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{u}$

Για  $x \rightarrow 0^-$  είναι  $u \rightarrow -\infty$

$$\text{Οπότε είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{u} e^{-u} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-u}}{u} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-u}}{1} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-u} = -\infty$$

**Δ4.**

Είναι  $f(t^2) = e^{t^2} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Για  $t \in [x, 1]$  έχουμε  $0 \leq x \leq 1$

$$f(t^2) > 0 \Rightarrow \int_x^1 f(t^2) dt > 0 \Rightarrow - \int_1^x f(t^2) dt > 0 \Rightarrow \int_1^x f(t^2) dt < 0 \Rightarrow F(x) < 0 \quad \text{για } x \in [0, 1].$$

Οπότε  $F(x) < 0$

Είναι  $F'(x) = e^{x^2}$  και  $F(1) = 0$

$$E = \int_0^1 |F(x)| dx = - \int_0^1 (x)' F(x) dx = - [x F(x)]_0^1 + \int_0^1 x F'(x) dx = - \cancel{F(1)}^0 + \cancel{0 \cdot F(0)}^0 + \int_0^1 x e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (e^1 - e^0) = \frac{e-1}{2} \quad \tau.μ$$

**Επιμέλεια :**

**Μυλωνίδης Σ.**

**Τάνης Σ.**

**Ηλιάδης Κ.**

**Μαργαριτέλη Ε.**

**Πασχαλίδου Ξ.**

**Σαμαρά Φ.**