ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΙΟΥ 2011
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ.152
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Α2. σελ.142
ΘΕΩΡΙΑ

Α3. σελ.65

Α4. α) Λ
β) Λ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$P(M)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(\Omega)=4N(M)$$

Οπότε $64<N(\Omega)<72\Leftrightarrow 64<4N(M)<72\Leftrightarrow\frac{64}{4}<N(M)<\frac{72}{4}\Leftrightarrow 16<N(M)<18$

Επειδή N(M) ακέραιος είναι $\boxed{N(M)=17}$

Άρα $N(\Omega)=4\cdot 17=68$

Β2.

Α΄ ΤΡΟΠΟΣ

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow P(A)=\frac{N(A)}{68}\Leftrightarrow N(A)=68\cdot P(A)=68\cdot 4\cdot\lambda^2$$

$$P(K)=\frac{N(K)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow P(K)=\frac{N(K)}{68}\Leftrightarrow N(K)=68\cdot P(K)=68\left(-5\lambda+\frac{7}{4}\right)$$

$$P(M)=\frac{N(M)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow N(M)=68\cdot\frac{1}{4}$$

Είναι $N(A)+N(K)+N(M)=N(\Omega)\Leftrightarrow 68\cdot 4\lambda^2+68\left(-5\lambda\frac{7}{4}\right)+68\frac{1}{4}=68 \overset{:68}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}-1=0\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot4\cdot1=25-16=9$

$$\lambda_{1,2}=\frac{5\pm3}{8}=\begin{cases}1\\ 1/4\end{cases}$$

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

$P(A)+P(K)+P(M)=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+2=1\Rightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot4\cdot1=25-16=9$

$$\lambda_{1,2}=\frac{5\pm3}{8}=\begin{cases}1\\ 1/4\end{cases}$$

Για $\lambda=1$, έχουμε: $P(A)=4\cdot\lambda^2=4>1$ άτοπο

Για $\lambda=\frac{1}{4}$, έχουμε: $P(A)=4\cdot\lambda^2=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$P(K)=-1+\frac{7}{4}=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$P(M)=\frac{1}{4}$

Β3.

Στο κουτί υπάρχουν:

$N(A)=P(A)\cdot N(\Omega)=\frac{1}{4}68=17$ άσπρες σφαίρες

$N(K)=P(K)\cdot N(\Omega)=\frac{1}{2}68=34$ κόκκινες σφαίρες

$N(M)=P(M)\cdot N(\Omega)=17$ μαύρες σφαίρες

Β4.

Επιλέγουμε μια σφαίρα τυχαία. Η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη είναι:

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Α(8,0) Β(10,16) Γ(12,20) Δ(14, y_Δ) Ε(16, y_E) Ζ(18,10) Η(20,0)

$\bar{x} = 14,2$

$\Delta E // x'x \Rightarrow y_\Delta = y_E$

$$\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{5} x_i v_i = \sum_{i=1}^{5} x_i \frac{v_i}{v} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow 14,2 = 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 14\frac{y_\Delta}{100} + 16\frac{y_\Delta}{100} + 18 \cdot 0,1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14,2 = 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 14\frac{y_\Delta}{100} + 16\frac{y_\Delta}{100} + 18 \cdot 0,1 \Leftrightarrow 14,2 = 1 + 2,4 + 0,3y_\Delta + 1,8 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 14,2 - 5,2 = 0,3y_\Delta \Leftrightarrow 9 = 0,3y_\Delta \Leftrightarrow y_\Delta = 30$ και $y_E = 30$. Οπότε $f_3 = f_4 = 30\%$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Έχουμε $\sum_{i=1}^{5} f_i\% = 100 \Rightarrow 10 + 20 + f_3 + f_4 + 10 = 100 \Rightarrow f_3 + f_4 = 100 - 40 \Rightarrow f_3 + f_4 = 60$

Όμως $y_\Delta = y_E \Rightarrow f_3 = f_4$

Άρα $2f_3 = 60 \Rightarrow f_3 = 30\%$

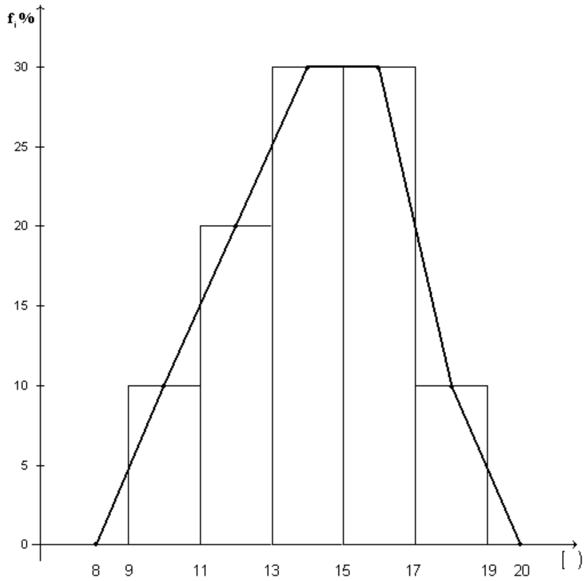
Οπότε $f_3 = f_4 = 30\%$

Γ2.

Το πλάτος των κλάσεων είναι $c = x_B - x_A \Leftrightarrow c = 2$

Η 1η κλάση είναι [α , β) όπου $\alpha = x_B - \frac{c}{2} = 10 - \frac{2}{2} = 9$

Οπότε το αντίστοιχο ιστόγραμμα και πολύγωνο είναι



Γ3.

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	$f_i\%$
[9,11)	10	30
[11,13)	12	20
[13,15)	14	30
[15,17)	16	30
[17,19)	18	10
ΣΥΝΟΛΟ	-	100

Γ4.

Οι πωλητές που θα πάρουν την χορήγηση του επιπλέον εφάπαξ είναι για $x \geq 15$

Οπότε έχουμε $f_4\% + f_5\% = 30\% + 10\% = 40\%$

Γ5.

Το εμβαδό είναι το μέγεθος του δείγματος . Οπότε $v = 80$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Rightarrow 0{,}10 = \frac{v_1}{80} \Rightarrow v_1 = 8$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Rightarrow 0{,}20 = \frac{v_2}{80} \Rightarrow v_3 = 24$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow 0{,}30 = \frac{v_3}{80} \Rightarrow v_3 = 24$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Rightarrow 0{,}30 = \frac{v_4}{80} \Rightarrow v_4 = 24$$

$$f_5 = \frac{v_5}{v} \Rightarrow 0{,}10 = \frac{v_5}{80} \Rightarrow v_5 = 8$$

Άρα, οι πωλητές που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό είναι 24 + 8 = 32

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Είναι $f(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}$, $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\left(\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)\right)'=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\left(\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{3}x\left(2x-\frac{11}{10}\right)\right)=$$

$$=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{11}{30}x+\frac{2}{15}+\frac{2}{3}x^2-\frac{11}{30}x\right)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=0\Rightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right)=0 \\ e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}>0 \end{array}\right\}\Rightarrow x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}=0\Rightarrow 15x^2-11x+2=0$$

$$\Delta=(-11)^2-4\cdot15\cdot2=121-120=1$$

$$x_{1,2}=\frac{11\pm1}{2\cdot15}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{11+1}{30}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}\\ \frac{11-1}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Στο διάστημα $\left(-\infty\,,\,\frac{1}{3}\right]$ η f γνησίως αύξουσα

Στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}\,,\,\frac{2}{5}\right]$ η f γνησίως φθίνουσα

Στο διάστημα $\left[\frac{2}{5}\,,\,+\infty\right)$ η f γνησίως αύξουσα

Δ2.

$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

οποτε $\quad P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$

Έχουμε όμως $A \subseteq B$ οπότε προκύπτει:

$A \cup B = B \Rightarrow P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5}$

$A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$

Δ3.

Είναι $h(x) = e^{\frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3})}$, $x \in R$

α.

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)} \overset{e^x \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow 5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) - 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x\left[5x^2 - \frac{11}{2}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 = 0\right) \Rightarrow x = 0 \ \text{ ή } \ \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{matrix} \right.$$

Δ3.
β.

Για $x_1 < x_2 < x_3$ είναι

$x_1 = 0$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$v_1 = 2x_1 + 1 \Rightarrow v_1 = 1$	$v_2 = 2x_2 + 1 \Rightarrow v_2 = 5$	$v_3 = 2x_3 + 1 \Rightarrow v_3 = 7$

Οπότε η μέση τιμή είναι

$$\overline{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v_1 + v_2 + v_3} \Rightarrow \overline{x} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{1 + 5 + 7} = \frac{10 + 21}{13} = \frac{31}{13}$$

Επιμέλεια :

Μυλωνίδης Σ.
Τάνης Σ.
Ηλιάδης Κ.
Μαργαριτέλη Ε.
Μπατζίνας Ν.
Πασχαλίδου Ξ.
Σαμαρά Φ.
Σιβένα Σ.