

Προτεινόμενα Θέματα Πανελληνίων Εξετάσεων
Μαθηματικά Γενικής Παιδείας
6-5-2015

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 4

A3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν ο n είναι περιττός αριθμός

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**

1. Για δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g ισχύει ότι

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

2. Η διάμεσος δ ενός πλήθους n παρατηρήσεων είναι πάντοτε μια από τις παρατηρήσεις

3. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ , δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε

$$\text{για κάθε φυσικό αριθμό } n > 1 \text{ ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \ell^n$$

4. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι αν $P(A) < P(B)$ τότε είναι $A \subseteq B$

5. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B.

6. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

7. Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων.

8. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Τότε ισχύει: $P(\emptyset) \leq P(A - B) \leq P(\Omega)$.

9. Αν η καμπύλη συχνοτήτων για ένα χαρακτηριστικό είναι κανονική ή περίπου κανονική με τυπική απόκλιση s και εύρος R , τότε ισχύει $s \approx 6R$

10. Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Η ευθεία $y = \alpha x + 6$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + \beta \quad \text{στο σημείο της } K(-1, f(-1)).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -12$ και $\beta = 7$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x-1) \cdot f''\left(\frac{x}{2}\right) = 6 \quad \text{κατά } x$$

γ) Να βρείτε τα όρια α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x+1)}{x^2 + x}$ και β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \frac{f''(x)}{2}}{\sqrt{x+7} - 3}$

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' που διέρχεται από το σημείο $M(3, 3)$ Μονάδες 5+6+7+7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$ και 5 τιμές της $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των 5 τιμών Μονάδες 6

β) Αν $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα.

i) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$A = \{\lambda \in \Omega / \text{η διακύμανση των 5 αριθμών να γίνεται ελάχιστη}\}$, καθώς και την ελάχιστη τιμή της διακύμανσης Μονάδες 6

ii) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$B = \{\lambda \in \Omega / \text{η διακύμανση των 5 αριθμών είναι μικρότερη ή ίση του 4,8}\}$ Μονάδες 6

γ) Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ οι τετμημένες n σημείων της γραφικής παράστασης της $f(x)$ με $s_x = 2$

Αν η τυπική απόκλιση των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων της C_f στα σημεία της

$A(x_i, f(x_i))$ με $i=1, 2, \dots, n$ είναι ίση με 4 να βρείτε την παράμετρο λ

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$

α) Αν $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$A(0, f(0))$ να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Μονάδες 4

β) Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ να βρείτε τις πιθανότητες

$$P(\lambda) = \frac{\alpha \lambda}{10} + \frac{5\beta}{5} \quad \text{όπου } \lambda \text{ τα στοιχειώδη ενεχόμενα του } \Omega$$

Μονάδες 3

γ) Δίνονται επίσης τα ενδεχόμενα $A = \left\{ \lambda \in \Omega / 12 \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = 12\lambda^2 - 36\lambda + 25 \right\}$ και

$$B = \left\{ \lambda \in \Omega / \delta \leq \frac{5}{6} \bar{x} \right\} \quad \text{όπου } \delta, \bar{x} \text{ η διάμεσος και η μέση τιμή των παρατηρήσεων}$$

$$\{\lambda, \lambda+1, \lambda+2, \lambda+5\}. \text{ Να αποδείξετε ότι } A = \{1, 2\} \text{ και } B = \{-1, 0, 1\}$$

Μονάδες 6

δ) Να βρείτε τις πιθανότητες :

i) Να πραγματοποιηθούν και το A και το B

Μονάδες 4

ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο το A

Μονάδες 4

iii) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B

Μονάδες 4

Επιμέλεια:

Μυλωνίδης Σ., Μαργαριτέλη Ε., Ηλιάδης Κ., Σαμαρά Φ., Ευθυμιάδης Γ., Ζαχαράκης Σ.