ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: ....

ΟΝΟΜΑ: ....

ΤΜΗΜΑ: ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ....

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 01-11-15

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+..........+\alpha_1 x+\alpha_0$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$ Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f: A $\to$ R λέγεται 1-1. Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1.Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 σε κάποιο διάστημα Α τότε είναι γνησίως μονότονη στο στο διάστημα αυτό.

2. Αν f , g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof τότε ισχύει $fog=gof$.

3. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} βρίσκονται πάντα πάνω στην διχοτόμο του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου δηλαδή την ευθεία $y=x$.

4. Α $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε η $f(x)>0$ στο πεδίο ορισμού της f.

5. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ τότε κατ΄ ανάγκη υπάρχουν και τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *και* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

6. Η C_f είναι συμμετρική της $C_{f^{-1}}$ ως προς τον άξονα $x'x$.

7.Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 τότε είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R\to R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-1,4)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα καθώς και ότι είναι αντιστρέψιμη.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(5-f^{-1}(3\ln x)\right)=e^{\ln f^{-1}(4)}$ Μονάδες 4+4

Β 2 . Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{3\ln x+5}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη, να βρεθεί η f^{-1} και να υπολογίσετε το όριο

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(e^x)+\frac{1}{4}}{\eta\mu(x+2)}$. Μονάδες 2+3+3

β) Αν $g(x)=1-\ln x$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\left(f^{-1}og\right)(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{e\cdot x^4}}$$

και να υπολογιστούν τα όρια:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left[g(e^x)-1\right]\eta\mu\frac{2016}{x^{2015}}$. Μονάδες 3+3+3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)-x$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

Γ2 .Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{f\left(\frac{1}{\ln 2}f(x)\right)}<1+e^{-1}$$

Γ3.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Γ4.Για κάθε $\alpha,\beta\in(1,+\infty)$ με $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι: $\alpha^\alpha<\beta^\beta$

και να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\left(x^4+2\right)^{x^4+2}}{\left(x^2+4\right)^{x^2+4}}=1$ Μονάδες 4+6+5+10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει:

$f^3(x)+2f(x)=12e^x$ για κάθε $x\in R$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Δ2.Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

Δ3.Να λυθεί η εξίσωση : $f(|x|-3)=e^{2\ln 2}+\ln\frac{1}{e^2}$

Δ4.Να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης $f^{-1}(x)$ και να υπολογιστούν αν υπάρχουν τα όρια:

$$i)\lim_{x\to 0}\frac{e^{f^{-1}(x)}\eta\mu 2x}{x^5+x^2}$$

$$ii)\lim_{x\to 0}\frac{f^3\left(\sigma\upsilon\nu 2x\right)+2f\left(\sigma\upsilon\nu 2x\right)}{|x|}$$

Δ5.Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$ τότε να δείξετε ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0-3h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=-3f'\left(x_0\right)$$

και στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $x_0=0$.

Μονάδες 2+4+4+9+6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ