

ΘΕΜΑ 1°

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 38

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 34-35

B. 1 → Σ, 2 → Σ, 3 → Λ, 4 → Σ, 5 → Λ, 6 → Λ, 7 → Λ, 8 → Σ, 9 → Λ, 10 → Σ

Γ. 1 → Β, 2 → Δ, 3 → Β, 4 → Γ, 5 → Α

ΘΕΜΑ 2°

A.

$$\alpha) (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -46 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = -46 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} - 2|\vec{\beta}|^2 = -46 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} - 2 \cdot 5^2 = -46 \Rightarrow 1 - 50 + 46 = \vec{\alpha}\vec{\beta} \Rightarrow -3 = \vec{\alpha}\vec{\beta}$$

$$\text{Οπότε } \text{syn}(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \frac{-3}{1 \cdot 5} = -\frac{3}{5}$$

$$\beta) \vec{v} \cdot \vec{u} = (3\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 3|\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot (-3) - 5^2 =$$

$$= 3 + 6 - 25 = 9 - 25 = -16$$

$$|\vec{v}|^2 = |3\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (3\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 9\vec{\alpha}^2 + 6\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 9 \cdot 1^2 + 6 \cdot (-3) + 5^2 = 9 - 18 + 25 = 16$$

$$\text{Άρα } |\vec{v}| = \sqrt{16} = 4$$

$$|\vec{u}|^2 = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 1^2 - 2 \cdot (-3) + 5^2 = 1 + 6 + 25 = 32$$

$$\text{Άρα } |\vec{u}| = \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Οπότε } \text{syn}(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-16}{4\sqrt{2} \cdot 4} = -\frac{16}{16\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Άρα } \hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}} = 135^\circ$$

B.

$$\alpha) \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{2}{3} \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{\beta} \cdot \frac{2}{3} \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{2}{3} \vec{\beta}^2 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{2}{3} |\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{3}{4} \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \frac{3}{4} \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{3}{4} \vec{\alpha}^2 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{3}{4} |\vec{\alpha}|^2 \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε } \frac{3}{4} |\vec{\alpha}|^2 = \frac{2}{3} |\vec{\beta}|^2 \Rightarrow 9|\vec{\alpha}|^2 = 8|\vec{\beta}|^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = \frac{8}{9} |\vec{\beta}|^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{\frac{8}{9}} |\vec{\beta}| \Rightarrow |\vec{\alpha}| = \frac{2\sqrt{2}}{3} |\vec{\beta}|$$

$$\beta) \text{syn}(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \stackrel{\text{από (1)}}{=} \frac{\frac{2}{3} |\vec{\beta}|^2}{\frac{2\sqrt{2}}{3} |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{\frac{2}{3} |\vec{\beta}|^2}{\frac{2\sqrt{2}}{3} |\vec{\beta}|^2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Οπότε είναι } \hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}} = 45^\circ$$

Γ. Έστω ότι ισχύει $\text{προβ}_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}} \vec{\alpha} + \text{προβ}_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}} \vec{\beta} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \text{προβ}_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}} \vec{\alpha} + \text{προβ}_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}} \vec{\beta} = \vec{0} &\stackrel{(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \neq \vec{0}}{\Leftrightarrow} (\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}} \vec{\alpha} + (\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}} \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} + (\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = \vec{0} &\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \text{ ισχύει} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A.

α) $(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = -24 \Rightarrow 2\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = -24 \Rightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 6|\vec{\beta}|^2 = -24 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \cdot 6^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 6 \cdot 4^2 = -24 \Rightarrow 72 + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 96 = -24 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 24 - 24 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 0$. Άρα $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

β) Είναι $\vec{\gamma} // (2\vec{\alpha} + \sqrt{3}\vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\gamma} = \lambda \cdot (2\vec{\alpha} + \sqrt{3}\vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\gamma} = 2\lambda\vec{\alpha} + \sqrt{3}\lambda\vec{\beta}$ **(1)**

Επίσης είναι

$$\begin{aligned} (\vec{\gamma} + 3\vec{\beta}) \perp (4\sqrt{3}\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}) &\Rightarrow (\vec{\gamma} + 3\vec{\beta}) \cdot (4\sqrt{3}\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (2\lambda\vec{\alpha} + \sqrt{3}\lambda\vec{\beta} + 3\vec{\beta}) \cdot (4\sqrt{3}\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2\lambda\vec{\alpha} + (\sqrt{3}\lambda + 3)\vec{\beta}) \cdot (4\sqrt{3}\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 8\sqrt{3}\lambda\vec{\alpha}^2 - 18\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta} + (\sqrt{3}\lambda + 3)4\sqrt{3}\vec{\alpha}\vec{\beta} - 9(\sqrt{3}\lambda + 3)\vec{\beta}^2 &= 0 \\ \Rightarrow 8\sqrt{3}\lambda \cdot 6^2 - 9(\sqrt{3}\lambda + 3) \cdot 4^2 = 0 &\Rightarrow 8\sqrt{3}\lambda \cdot 36 - 9(\sqrt{3}\lambda + 3) \cdot 16 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 288\sqrt{3}\lambda - 144(\sqrt{3}\lambda + 3) = 0 &\Rightarrow 288\sqrt{3}\lambda - 144\sqrt{3}\lambda - 3 \cdot 144 = 0 \Rightarrow 144\sqrt{3}\lambda = 3 \cdot 144 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda = \frac{3 \cdot 144}{144\sqrt{3}} &\Rightarrow \lambda = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} \Rightarrow \lambda = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Άρα από την **(1)** $\Rightarrow \vec{\gamma} = 2\sqrt{3}\vec{\alpha} + \sqrt{3}^2\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\gamma} = 2\sqrt{3}\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

B.

α) Επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A ισχύει

$$4\alpha - 5 = \alpha \cdot 1 + 5 - 2\alpha \Rightarrow 4\alpha - \alpha + 2\alpha = 5 + 5 \Rightarrow 5\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 2$$

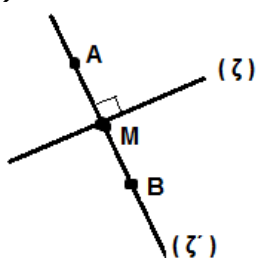
Οπότε η ευθεία είναι $\varepsilon: y = 2x + 1$ και το σημείο A(1, 3)

β) Επειδή $(\zeta) // (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{\zeta} = \lambda_{\varepsilon} \Rightarrow \lambda_{\zeta} = 2$

Το σημείο του x'x με τετμημένη -3 από το οποίο διέρχεται η (ζ) είναι το (-3, 0)

Οπότε $\zeta: y - 0 = 2(x - (-3)) \Rightarrow y = 2x + 6$

γ)



Θεωρούμε ευθεία (ζ') που είναι κάθετη στην (ζ) και διέρχεται από το σημείο A(1, 3)

$$\text{Είναι } \lambda_{\zeta} \cdot \lambda_{\zeta'} = -1 \Rightarrow 2 \cdot \lambda_{\zeta'} = -1 \Rightarrow \lambda_{\zeta'} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Οπότε } \zeta': y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Το σημείο τομής M των ευθειών (ζ) και (ζ') είναι

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 6 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow 4x + 12 = -x + 7 \Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1$$

Οπότε για $x = -1$ είναι $y = 2 \cdot (-1) + 6 \Rightarrow y = -2 + 6 \Rightarrow y = 4$. Άρα το $M(-1, 4)$

Επειδή το B είναι το συμμετρικό του A ως προς την (ζ) ισχύει ότι το M είναι μέσο του AB

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + x_B}{2} \Rightarrow -2 = 1 + x_B \Rightarrow x_B = -3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{3 + y_B}{2} \Rightarrow 8 = 3 + y_B \Rightarrow y_B = 5. \text{ Άρα το συμμετρικό είναι το } B(-3, 5)$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A.

α) $(\vec{a} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} = 8\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} + 4\vec{\beta} \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} = 8\vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} + 4\vec{a} \cdot \vec{\beta} \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{v})^2 = 8\vec{a} \cdot \vec{v} + 4 \cdot (-4) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{v})^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{v} + 16 = 0 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{v} - 4)^2 = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} - 4 = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = 4$

β) Για $\vec{a} \cdot \vec{v} = 4$ έχουμε $4\vec{v} = 8\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} + 4\vec{\beta} \Rightarrow \vec{v} = 2\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} + \vec{\beta}$ **(1)**

Αρκεί να βρούμε το διάνυσμα $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ που είναι παράλληλο στο \vec{a}

Οπότε $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = \lambda |\vec{a}|^2 \Rightarrow 4 = \lambda \cdot 1^2 \Rightarrow \lambda = 4$

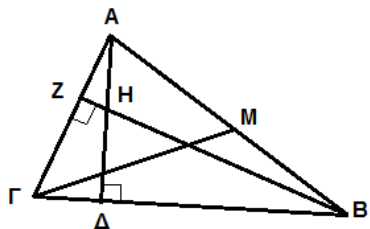
Άρα $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = 4\vec{a}$ οπότε από την **(1)** $\Rightarrow \vec{v} = 2 \cdot 4\vec{a} + \vec{\beta} \Rightarrow \vec{v} = 8\vec{a} + \vec{\beta}$

γ) Είναι $\vec{v} \cdot (\vec{a} - \vec{\beta}) = -28 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} - \vec{\beta} \cdot \vec{v} = -28 \Rightarrow 4 - \vec{\beta} \cdot \vec{v} = -28 \Rightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{v} = 32$

Επίσης $\vec{v} = 8\vec{a} + \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{v} = 8\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \Rightarrow 32 = 8 \cdot (-4) + |\vec{\beta}|^2 \Rightarrow 32 = -32 + |\vec{\beta}|^2 \Rightarrow |\vec{\beta}|^2 = 64 \Rightarrow |\vec{\beta}| = 8$

Άρα $\text{συν}(\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{-4}{1 \cdot 8} = -\frac{1}{2}$. Οπότε $(\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{\beta}}) = 120^\circ$

B.



α) Για $x = -3$ στην $y = x - 2$ έχουμε $y = -3 - 2 = -5 \neq 3$
 έχουμε ότι το σημείο $A(-3, 3)$ δεν ανήκει στην $y = x - 2$
 άρα είναι η πλευρά $B\Gamma$

β) Το ύψος $A\Delta$ είναι κάθετο στην $B\Gamma$ οπότε
 $\lambda_{A\Delta} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Rightarrow \lambda_{A\Delta} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lambda_{A\Delta} = -1$

και διέρχεται από το A οπότε η εξίσωση της $A\Delta$ είναι

$$A\Delta: y - 3 = -1 \cdot (x - (-3)) \Rightarrow y - 3 = -x - 3 \Rightarrow y = -x$$

Το σημείο Δ είναι το σημείο τομής των $B\Gamma$ και $A\Delta$

$$\left. \begin{array}{l} B\Gamma: y = x - 2 \\ A\Delta: y = -x \end{array} \right\} \Rightarrow x - 2 = -x \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ οπότε } y = -1. \text{ Άρα το } \Delta(1, -1)$$

γ) Το σημείο Μ ανήκει στις ευθείες ΒΓ και ΓΜ άρα τις επαληθεύει οπότε έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} y_{\Gamma} = x_{\Gamma} - 2 \\ y_{\Gamma} = \frac{5x_{\Gamma} + 10}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow x_{\Gamma} - 2 = \frac{5x_{\Gamma} + 10}{9} \Rightarrow 9x_{\Gamma} - 18 = 5x_{\Gamma} + 10 \Rightarrow 4x_{\Gamma} = 28 \Rightarrow x_{\Gamma} = 7$$

Για $x_{\Gamma} = 7$ είναι $y_{\Gamma} = 7 - 2 = 5$. Άρα το $\Gamma(7, 5)$

Είναι $\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_{\Gamma} - y_A}{x_{\Gamma} - x_A} = \frac{5 - 3}{7 - (-3)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ και η εξίσωση της ΑΓ είναι:

$$A\Gamma: y - 5 = \frac{1}{5}(x - 7) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5} + 5 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5} + \frac{25}{5} \Rightarrow y = \frac{x + 18}{5}$$

δ) Το Μ είναι μέσο της ΑΒ οπότε είναι

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2x_M = -3 + x_B \quad \text{(1)} \quad \text{και} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 2y_M = 3 + y_B \quad \text{(2)}$$

Το σημείο Μ ανήκει επίσης στην ΓΜ άρα $y_M = \frac{5x_M + 10}{9} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 2y_M = 2 \cdot \frac{5x_M + 10}{9} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 9 \cdot 2y_M &= 5 \cdot 2x_M + 20 \stackrel{(1), (2)}{\Rightarrow} 9(3 + y_B) = 5(-3 + x_B) + 20 \Rightarrow 27 + 9y_B = -15 + 5x_B + 20 \Rightarrow \\ \Rightarrow 9y_B &= 5x_B + 5 - 27 \Rightarrow 9y_B = 5x_B - 22 \end{aligned}$$

Όμως το Β ανήκει στην ΒΓ άρα ισχύει $y_B = x_B - 2$ και έχουμε :

$$\left. \begin{array}{l} 9y_B = 5x_B - 22 \\ y_B = x_B - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 9(x_B - 2) = 5x_B - 22 \Rightarrow 9x_B - 18 = 5x_B - 22 \Rightarrow 4x_B = -4 \Rightarrow x_B = -1$$

Άρα $y_B = -1 - 2 \Rightarrow y_B = -3$ οπότε $B(-1, -3)$

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 3}{-1 - (-3)} = \frac{-6}{2} = -3$ οπότε

$$AB: y - 3 = -3(x - (-3)) \Rightarrow y = -3x - 9 + 3 \Rightarrow y = -3x - 6$$

ε) Έστω ΒΖ το ύψος στην πλευρά ΑΓ. Είναι $\lambda_{BZ} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Rightarrow \lambda_{BZ} \cdot \frac{1}{5} = -1 \Rightarrow \lambda_{BZ} = -5$

Οπότε ΒΖ: $y - (-3) = -5(x - (-1)) \Rightarrow y + 3 = -5x - 5 \Rightarrow y = -5x - 8$

Το ορθόκεντρο Η είναι το σημείο τομής των υψών ΑΔ και ΒΖ

$$\left. \begin{array}{l} A\Delta: y = -x \\ BZ: y = -5x - 8 \end{array} \right\} \Rightarrow -x = -5x - 8 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -2$$

Οπότε $y = -(-2) \Rightarrow y = 2$ και το $H(-2, 2)$