σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .

ΟΝΟΜΑ: . . . .

ΤΜΗΜΑ: . . . .

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: . . . .

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 05-01-13

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha\ ,\ \beta]$. Αν ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha\ ,\ \beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha\ ,\ \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$

Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της

Μονάδες 5

Γ. Συμπληρώστε με **Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)** τις παρακάτω προτάσεις :

1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε και η συνάρτηση $f\circ g$ είναι συνεχής στο x_0

2. Αν η f(x) είναι ορισμένη στο R και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

3. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ τότε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ είναι καλά ορισμένο και είναι ίσο με το 0.

4. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$ τότε η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

5. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [α , β] και υπάρχει $x_0\in(\alpha\ ,\ \beta)$ ώστε $f(x_0)=0$, τότε θα ισχύει: $f(\alpha)f(\beta)<0$

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ τότε το σύνολο τιμών της f στο Δ θα είναι διάστημα.

7. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β] , τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή .

8. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_o, τότε ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$.

9. Αν $z_1, z_2 \in C$ με $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=0$ τότε ισχύει $\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)=0$

10. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = x\cdot f(x) - \int_\alpha^\beta x\cdot f'(x)dx$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός w για τον οποίο ισχύει $4\,\mathrm{Re}(w)+4\,\mathrm{Im}(\overline{w})=|w|^2+7$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w

β) Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή του $|w|$

γ) Θεωρούμε επίσης τους μιγαδικούς $z\neq -i$ για τους οποίους ισχύει $z(1-2i-w)=(w-2)i$

i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $\varepsilon: 4x-2y+3=0$

ii) Να βρείτε ποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς z έχει το ελάχιστο μέτρο

Μονάδες 6+6+6+7

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R\to R$ και ο μιγαδικός αριθμός $z\neq \frac{1}{2}$ για τα οποία ισχύουν :

$f^2(x)+\eta\mu^2 x = 2xf(x)$, για κάθε $x\in R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\left|\frac{z-2}{2z-1}\right|$

α) Να αποδείξετε ότι $|z|=1$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=\frac{(z+i)^{10}}{z^{10}-1}$ είναι πραγματικός

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(5+|z+3-4i|)x = x^3+10$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[1\ ,\ 2]$

Μονάδες 3+3+3+4

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+2012\right]-\ln(x+2013)$, με $x>-2012$, όπου λ ένας πραγματικός αριθμός , με $\lambda\geq -1$

α) Να προσδιοριστεί η τιμή του λ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός

β) Αν $\lambda=-1$

i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αυξουσα στο $(-2012\ ,\ +\infty)$ να βρείτε το σύνολο τιμών της

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2013$ δεν έχει λύση στο $(-2012\ ,\ +\infty)$

iii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $A=\int_0^1 e^{f(x)}dx$

Μονάδες 3+2+3+4

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει : $f\big(f(x)\big)+f^3(x)=2x+3$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(0\ ,\ +\infty)\to R$ για την οποία ισχύει
$f\big(g(x)-x\big)-f\big(\ln x+1\big)=0$, για κάθε $x>0$

i) Να δείξετε ότι είναι $g(x)=x+\ln x+1$ και ότι είναι «1-1»

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g^{-1}(x)$

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0\ ,\ +\infty)$ ώστε να ισχύει $g(x_0)=\dfrac{2013}{2012}$

iv) Να λύσετε την εξίσωση $g^{-1}\big(3g(|x|+1)-4\big)=1$

v) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-4<\ln\dfrac{x^2+7}{2x^2+3}$

vi) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I(\lambda)=\int_1^{\lambda} xg(x)dx$ και στη συνέχεια το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{I(\lambda)}{\lambda^2}$, όπου $\lambda>1$

Μονάδες 4+3+3+4+4+3+4

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΚΑΛΗ ΧΡΟΝΙΑ ΚΑΙ ΧΡΟΝΙΑ ΠΟΛΛΑ