

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
4 / 1 / 2013

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Να γράψετε τους ορισμούς :

α. Πότε ένα σημείο $x_0 \in A$ λέγεται τοπικό ελάχιστο

β. Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$

Μονάδες 5

B. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι η $f'(x) = 2x$

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστό** ή **Λάθος**

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, $\ell > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \ell^\nu$

2. Αν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ τότε η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

3. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$, ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής.

4. Το πλάτος c της κλάσης $[a, \beta)$ είναι $c = \beta - a$

5. Αν οι μεταβλητές x_1, x_2, x_3 έχουν συχνότητες v_1, v_2, v_3 τότε η μέση τους τιμή είναι ίση με

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{v_1 + v_2 + v_3}$$

6. Το κυκλικό διάγραμμα γίνεται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές

7. Το εμβαδό που σχηματίζει το πολύγωνο συχνοτήτων με τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος n

8. Αν στο σημείο x_0 ισχύει $f'(x_0) = 0$ τότε στο σημείο αυτό η f παρουσιάζει σίγουρα ακρότατο

9. Για τις αθροιστικές συχνότητες N_1, N_2 ισχύει $N_2 + N_1 = v_2$

10. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σε κάποιο σημείο x_0 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

Δ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ είναι το :

A. $A = [-2, 2]$

B. $A = (-2, 2)$

Γ. $A = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Δ. $A = \mathbb{R}$

2. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f(2) = 0$, $f(x) > 0$ για $x > 2$ και $f(x) < 0$ για $x < 2$ τότε για στο σημείο $x_0 = 2$ για την f ισχύει :

A. έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 2$

B. Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

Γ. έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$

Δ. Τίποτε από τα προηγούμενα

3. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $x_0 = -1$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = -2x + 1$ τότε ισχύει ότι

A. $f'(-1) = -2$

B. $f'(-1) = \frac{1}{2}$

Γ. $f'(-1) = -\frac{1}{2}$

Δ. $f'(-1) = 2$

4. Αν για τις παρατηρήσεις $0, 2, \kappa, 4$ ισχύει ότι $\bar{x} = 3$ τότε ο αριθμός κ είναι ίσος με

A. $\kappa = 6$

B. $\kappa = 3$

Γ. $\kappa = 2$

Δ. $\kappa = 0$

5. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln 5x$, $x > 0$ είναι ίση με :

A. $f'(x) = \frac{1}{5}$

B. $f'(x) = \frac{1}{5x}$

Γ. $f'(x) = -\frac{1}{5x}$

Δ. $f'(x) = \frac{1}{x}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Σε ένα δείγμα 180 ατόμων που εξετάστηκαν ως προς την ομάδα αίματος προέκυψαν τα εξής δεδομένα :

- Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην ομάδα αίματος A είναι ίση με 72°
- Το ποσοστό των ατόμων που έχουν ομάδα αίματος AB είναι 30%
- Το πλήθος των ατόμων που έχουν ομάδα αίματος B είναι τετραπλάσιο από αυτο της ομάδας αίματος O

α) Να βρεθούν οι αντίστοιχες συχνότητες v_i για την κάθε ομάδα αίματος

Μονάδες 4

β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων

Μονάδες 4

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + (3 - \alpha)x + \alpha + 2$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης στα σημεία $A(-1, f(-1))$ και $B(5, f(5))$ είναι μεταξύ τους παράλληλες.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$

Μονάδες 4

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(f'(x))^2}$

Μονάδες 4

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο που έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Η ιστορία του ελληνικού ποδοσφαίρου έγραψε..... Ομάδα Α' κατηγορίας έπεσε σε ένα καλοκαίρι 4 κατηγορίες, όχι αγωνιστικά αλλά παρασκηνιακά.

Επιστροφή όμως στη δράση. Αγώνας από το σύντομο μέλλον: ΗΡΑΚΛΗΣ – ΠΑΟΚ τελικός κυπέλλου Ελλάδος 2013 – 14 στο Καραϊσκάκης στάδιο. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα 120 λεπτά του αγώνα (μαζί με την παράταση) και η στατιστική υπηρεσία των «αμερόληπτων» μαθητών του Φροντιστηρίου «ΣΥΓΧΡΟΝΟ» κατέγραψαν τις ευκαιρίες για επίτευξη γκολ και για τις δύο ομάδες

Χρόνος [,)	Κεντρική τιμή x_i	Ευκαιρία για γκολ ΗΡΑΚΛΗ v_i	Ευκαιρία για γκολ ΠΑΟΚ v_i
[0 , 20)		Θέση ακροτάτου της $g(x)$	1
[20 , 40)		$3 + f'(1)$	2
[40 , 60)		$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - g''(x)}{g'(x)}$	1
[60 , 80)		10	$\frac{1}{4}g(1)$
[80 , 100)		$\frac{1}{3\sqrt{5}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}}$	2
[100 , 120)		$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \eta \mu \frac{\pi x}{2}}{1 - x^2} + 5$	$f(2) - 3$
Σύνολο			

Όπου οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 - 2 \ln x + 7$, $x > 0$

α) Να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

Μονάδες 6

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων της ομάδας του ΗΡΑΚΛΗ

Μονάδες 3

γ) Αν το παιχνίδι τελείωνε στην κανονική διάρκεια (90 λεπτά) να βρείτε πόσες ευκαιρίες για γκολ θα είχε η ομάδα του ΗΡΑΚΛΗ

Μονάδες 3

δ) Να βρείτε πόσες ευκαιρίες είχαν συνολικά οι δύο ομάδες από το 70 λεπτό και μετά

Μονάδες 3

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $x \neq 0$

α) Να βρείτε, αν υπάρχουν τα ακρότατα της συνάρτησης

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Εξετάσαμε ένα δείγμα n φοιτητών μιας σχολής ως προς τον αριθμό των μαθημάτων που πέρασαν το περασμένο εξάμηνο και οι απαντήσεις που πήραμε ήταν $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$. Από την επεξεργασία των δεδομένων προέκυψαν τα εξής :

- Η γωνία του κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2 = 2$ είναι κατά 18° μεγαλύτερη από την γωνία που αντιστοιχεί στην τιμή $x_1 = 1$
- 27 φοιτητές πέρασαν το πολύ 2 μαθήματα
- Το 95% των φοιτητών πέρασαν το πολύ 4 μαθήματα
- 3 φοιτητές πέρασαν 5 μαθήματα
- Οι φοιτητές που πέρασαν 3 μαθήματα είναι τετραπλάσιοι από τους φοιτητές που πέρασαν 4 μαθήματα

α) Να αποδείξετε ότι $n = 60$, $n_1 = 12$ και $n_4 = 6$

Μονάδες 8

β) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, απολύτων και αθροιστικών

Μονάδες 3

γ) Να βρείτε πόσοι φοιτητές πέρασαν το πολύ 3 μαθήματα

Μονάδες 2

δ) Να βρείτε το ποσοστό των φοιτητών που πέρασαν τουλάχιστον 4 μαθήματα

Μονάδες 2

ε) Να βρείτε το μέσο όρο των μαθημάτων που πέρασαν οι φοιτητές το περασμένο εξάμηνο

Μονάδες 5

στ) Να βρείτε πόσοι επιπλέον φοιτητές που έχουν περάσει 4 μαθήματα πρέπει να προστεθούν στο αρχικό δείγμα, ώστε ο τελικός μέσος όρος να είναι 3 μαθήματα

Μονάδες 5



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Διάρκεια 3 ώρες

Χρόνια πολλά και καλή χρονιά