ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: ....

ΟΝΟΜΑ: ....

ΤΜΗΜΑ: ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ....

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 03-11-13

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+..........+\alpha_1 x+\alpha_0$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$ ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Α2. Αν Α και Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι

$$|z_1-z_2|=|\overrightarrow{AB}|=(AB)$$ ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Β. Έστω δυο συναρτήσεις f ,g με πεδίο ορισμού το Α , Β αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1.Η γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης "1-1" , τέμνει τον άξονα x΄x ακριβώς σε ένα σημείο

2. Αν ισχύει $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A_f$ τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει πάντα μέγιστο στο $x_0\in A_f$

3. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$ τότε για κάθε $x\in A_f$ ισχύει $f(x)>0$

4. Ισχύει $|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$

5. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και "1-1"

6. Για οποιαδήποτε συνάρτηση που είναι "1-1" οι συναρτήσεις $f\circ f^{-1}$ και $f^{-1}\circ f$ είναι ίσες

7.Αν f είναι μια "1-1" συνάρτηση , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(\alpha\,,\,\alpha)$ τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από το σημείο $M(\alpha\,,\,\alpha)$

8. Για κάθε $z\,,\,w\in C$ ισχύει ότι $Re(z+w)=Re(z)+Re(w)$

9. Ισχύει πάντα η ισοδυναμία $\alpha+\beta i=0\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\beta=0$

10. Τα κοινά σημεία ανάμεσα στην C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται αν λύσουμε την εξίσωση $f(x)=x$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνονται οι μιγαδικοί

$$z_1 = 1 - 2i \quad \text{και} \quad z_2 = 3 + 4i$$

Α) Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $\frac{z_2}{z_1}$

Β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ όπου $\beta, \gamma \in R$ είναι η $\frac{z_2}{z_1}$ να βρείτε τις τιμές των β και γ.

Γ) θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$|z - \beta z_1| = \gamma$$

όπου β,γ οι τιμές του β ερωτήματος

Γ1) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

Γ2) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του $\frac{z_2}{z_1} i$ ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο.

Γ3) Αν για τον μιγαδικό w ισχύει ότι $w = \frac{zi - 4 - 27i}{z - \overline{z_2}}$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \frac{w + 5i}{w - 5i}$ είναι φανταστικός

ΜΟΝΑΔΕΣ 2+2+2+3+3

Β 2 . Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και σύνολο τιμών το R για το οποίο ισχύει

$$f^3(x) + 3f(x) - 2x = 5$$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση της.

Β) Να βρεθεί το

$$\lim_{x \to 0} \frac{2f^{-1}(x) + \eta\mu 5x + 5}{\eta\mu x}$$

Γ) Αν ισχύει

$$|z + 4i|^3 - |z - 2 + 6i|^3 = 3|z - 2 + 6i| - 3|\overline{z} - 4i|$$

να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

Δ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z|$ και του $|z - 4 + 2i|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2+3+4+4

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w τέτοιοι ώστε $w = \left(\frac{4 - 3i}{3 + 4i}\right)^{13} + (2 - i)^2 + 1 + 2i$ και

$$|z + 3i| + |i \cdot \overline{z} + 3| = \sqrt{2} \cdot |1 + i|.$$

α. Να αποδείξετε ότι $\text{Re}(w) = 4$ και $\text{Im}(w) = -3$.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(0, -3)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 4

γ. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Μονάδες 4

Γ2 . Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο R με $f(0)=-2$ και οι μιγαδικοί

$z=f(x)+f(x)i$ και $w=g(x)-xi$

Α)Αν ισχύει $|z|=\sqrt{2}\left(e^x+1\right)$ και $|w+2i|=|w-4|$ να βρεθούν ότι οι τύποι των συναρτήσεων

είναι $f(x)=-e^x-1$ και $g(x)=\dfrac{x+3}{2}$

Β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z και να υπολογιστεί το $\alpha\in R$ ώστε

$$\lim_{x\to-3}\left(|z|\alpha+\frac{\eta\mu 2g(x)}{x+3}-1\right)=\frac{e^{-3}+1}{\sqrt{2}}$$

Γ) Έστω συνάρτηση $h(x)=-f(x)+2x-4$

Γ1) Να δείξετε ότι η h αντιστρέφετε και να λυθεί η εξίσωση $h(x)=-2$

Γ2) Να λύσετε την ανίσωση $h(h(\ln(x^2+2))-2\ln 3)\prec -2$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2+4+3+4

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f ορισμένη στο R και η συνάρτηση

$g(x)=f(x)-\left(f\circ f\right)(x)$

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα και η g αντιστρέψιμη.

β) Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $g\left(|2z-1|\right)-g\left(|z-2|\right)=0$ να βρείτε το $|z|$

γ) Δίνεται ο μιγαδικός w .Αν τα σημεία $A\left(2,|w-3i|\right)$ και $B\left(3,|w+i|\right)$ ανήκουν στην C_g .Να δείξετε ότι $\text{Im}\left(w\right)<1$

δ) Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της παράστασης $|z-3+4i|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+3+3+3

Δ2 . Αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού $w=x+yi$ $x,y\in R$ είναι ο κύκλος

$C:\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=4$

α) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τους οποίους ισχύει

$z=\dfrac{w+1}{2i}$ είναι κύκλος με κέντρο N(1,0) και ακτίνα $\rho=1$

β) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικών $\alpha=\kappa+\lambda\iota$ $\kappa,\lambda\in R$ για τους οποίους ισχύει $\alpha\cdot z=i+3$ είναι μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

γ) Να βρείτε το ελάχιστο μέτρο του μιγαδικού α και τον μιγαδικό α με το ελάχιστο μέτρο.

δ) Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της παράστασης $|w-\alpha|$ και την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της παράστασης $|z-w|$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+3+3+4

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α