

ΕΠΩΝΥΜΟ:

ΟΝΟΜΑ:

ΤΜΗΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ 24 / 02 / 13

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Για την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ με ρίζες x_1, x_2 , να αποδείξετε ότι :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**) τις παρακάτω προτάσεις

1) Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

2) Ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

3) Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[m+n]{\alpha}$

4) Αν $\alpha \geq 0$ η εξίσωση $|x| - \alpha = 0$ έχει 2 πραγματικές ρίζες

5) Ισχύει ότι $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$

6) Αν $\theta \geq 0$ τότε $|x| \geq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$

7) Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες αν ισχύει $\Delta \geq 0$

8) Ισχύει ότι $x^2 - Sx + P = 0$ όπου S, P είναι το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών αντίστοιχα

9) Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων μόνο όταν $\Delta < 0$

10) Οι ανισώσεις $(x - \alpha)(x - \beta) \geq 0$ και $\frac{x - \alpha}{x - \beta} \geq 0$ έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις

Μονάδες 10

Γ. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

1) Για την εξίσωση $2x^2 + 2x - \kappa = 0$ ισχύει ότι $x_1 \cdot x_2 = 2$, τότε ο αριθμός κ είναι ίσος με :

A. $\kappa = 4$

B. $\kappa = -4$

Γ. $\kappa = 2$

Δ. $\kappa = -2$

2) Η εξίσωση $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + 1 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει :

A. Μια διπλή ρίζα

B. 2 άνισες ρίζες

Γ. Είναι αδύνατη

Δ. Είναι ταυτότητα

3) Η ποσότητα $A = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ είναι ίση με :

A. 2

B. $\sqrt[6]{2}$

Γ. $\sqrt{2}$

Δ. $\sqrt[3]{2}$

4) Για την ανίσωση $|x - 2| < -2$ έχουμε :

A. Είναι αδύνατη

B. Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ. $x < 0$ ή $x > 4$

Δ. $0 < x < 4$

5) Για την ανίσωση $-2x^2 + 4\alpha x - 2\alpha^2 - 1 < 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε :

A. Είναι αδύνατη

B. Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ. Ισχύει μόνο αν $\alpha > 0$

Δ. Ισχύει μόνο αν $\alpha < 0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Δίνεται η παράσταση $A = \left(\sqrt{3-\sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{3}-4} \right) \left(\sqrt{3-\sqrt{3}} + \sqrt{3\sqrt{3}-4} \right)$

α. Να απλοποιήσετε την παράσταση A

Μονάδες 3

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $B = \frac{1}{A} + 2006 - 4\sqrt{3}$

Μονάδες 4

B. Να λύσετε την εξίσωση $\lambda x - 3\lambda = \lambda^2 - 3x$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 3

Γ. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α. $|2x + 3| = |x + 9|$

Μονάδες 2

β. $|-1 + x| = -5$

Μονάδες 2

γ. $||x + 1| - 2| = 3$

Μονάδες 3

δ. $\frac{4 - 5|x - 3|}{12} - \frac{|3x - 9| - 3}{2} = |6 - 2x| - 6$

Μονάδες 4

ε. $-2x^2 + (\alpha - 3)x + \alpha - 1 = 0$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ

Μονάδες 3

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) να βρείτε για ποιές τιμές του λ ισχύει :

i) $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Μονάδες 3

ii) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{4}{5}$

Μονάδες 3

iii) Το γινόμενο των ριζών είναι τετραπλάσιο από το άθροισμα τους.

Μονάδες 3

B. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 4 = 0$

α. Δίνεται ο αριθμός α με $\alpha = (1 + x_1)^{2013} \cdot (1 + x_2)^{2013}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$

Μονάδες 3

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = (\alpha x_1 + 2)(\alpha x_2 + 2)$

Μονάδες 3

γ. Να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{\alpha}{x_1}$ και $\frac{\alpha}{x_2}$

Μονάδες 3

Γ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ και η εξίσωση $x^2 - (\alpha^2 - 1)x - 5\alpha\beta = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $2x_1 - 1$ και $2x_2 - 1$ να βρεθούν τα α και β

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Να λυθούν οι ανισώσεις

α. $x(x^2 - x - 6)(x^2 - x + 2) < 0$

Μονάδες 5

β. $\frac{3x-1}{x+2} \geq 2$

Μονάδες 5

B. Δίνονται τα τριώνυμα $A = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + 5\lambda + 10$ και $B = x^2 + 4x + 4\lambda + 16$

Το τριώνυμο A έχει ρίζα τον αριθμό 2 και το τριώνυμο B αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -7$

Μονάδες 5

β) Για τις τιμές του x που ορίζεται η παράσταση $\frac{A}{B}$ να την απλοποιήσετε.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε τις παραστάσεις $A + 25$ και $B + 16$ και να τις παραγοντοποιήσετε

Μονάδες 5

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α