σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΜΙΣΚΗ &ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422

ΕΠΩΝΥΜΟ: ....

ΟΝΟΜΑ: ....

ΤΜΗΜΑ: ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ....

ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο

Α. i), ii) Σχολικό βιβλίο σελ. 60-61

Β. i) **γ** ii) **γ** $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{y}+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{y} \\ 1+y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{y} \\ y^2=-1\ ,\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \end{cases}$

iii) **α.** Θα πρέπει για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού και το –x να ανήκει στο πεδίο ορισμού δηλαδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης να είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων .

Γ. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**)

1.**Σ**, 2.**Λ**, 3.**Σ**, 4.**Λ**, 5.**Σ**, 6.**Λ** ,7.**Λ**, 8. **Λ** , 9.**Λ** ,10.**Σ**

Θέμα 2ο

Α. i) $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1 \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2x=1 \Rightarrow \dfrac{1}{25}+\sigma\upsilon\nu^2x=1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2x=1-\dfrac{1}{25} \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2x=\dfrac{24}{25} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=\pm\sqrt{\dfrac{24}{25}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ και επειδή $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$, δηλαδή η γωνία βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο όπου το συνημίτονο είναι αρνητικό, άρα $\sigma\upsilon\nu x=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$\varepsilon\varphi x=\dfrac{-\dfrac{1}{5}}{-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ και $\sigma\varphi x=2\sqrt{6}$

$$\mathrm{A}=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\varphi x}{\sigma\varphi x}=\frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}-2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=\frac{-\frac{2\sqrt{6}+10\sqrt{6}}{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{-\frac{12\sqrt{6}}{5}}{2\sqrt{6}}=-\frac{12\sqrt{6}}{10\sqrt{6}}=-\frac{6}{5}$$

ii) Αν Α, Β , Γ γωνίες τριγώνου να αποδείξετε ότι :

α) $\hat{\mathrm{A}}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o$ δηλαδή η γωνία Α θα είναι παραπληρωματική της γωνίας Β+Γ και επομένως θα έχουν το ίδιο ημίτονο : $\eta\mu\mathrm{A}=\eta\mu\left(\mathrm{B}+\Gamma\right)$

Άρα $\eta\mu^2\mathrm{A}+\sigma\upsilon\nu^2\left(\mathrm{B}+\Gamma\right)=\eta\mu^2\left(\mathrm{B}+\Gamma\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\mathrm{B}+\Gamma\right)=1$

β) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\right)=1$

$\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}}{2}=90^o$ δηλαδή η γωνία $\frac{\mathrm{A}}{2}$ θα είναι συμπληρωματική της γωνίας $\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}$ και επομένως η εφαπτομένη της μιας θα είναι ίση με τη συνεφαπτομένη της άλλης :

$\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\right)=\sigma\varphi\frac{\mathrm{A}}{2}$

Άρα $\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right)\sigma\varphi\left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right)=1$

Β. α) Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα :

$\left[-1,-0.2\right]\cup\left[0.2,0.9\right]\cup\left[1,5,1.8\right]$

β) Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή στις θέσεις $x_1=-0.2$, $x_2=0.9$, $x_3=1,8$ το $f\left(-0.2\right)=f\left(0.9\right)=f\left(1.8\right)=0.8$

γ) Η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει λύσεις $x_1=-0.9$, $x_2=1.4$, $x_3=1.6$, $x_4=1.9$

δ) Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι η $f\left(1.5\right)=f\left(2\right)=-1.1$

Θέμα 3ο

Α. i) $\eta\mu135^{\circ}=\eta\mu\left(180^o-45^o\right)=\eta\mu45^o=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon\varphi225^o=\varepsilon\varphi\left(180^o+45^o\right)=\varepsilon\varphi45^o=1$

$\sigma\upsilon\nu120^o=\sigma\upsilon\nu\left(180^o-60^o\right)=-\sigma\upsilon\nu60^o=-\frac{1}{2}$, $\eta\mu225^o=\eta\mu\left(180^o+45^o\right)=-\eta\mu45^o=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sigma\varphi135^{\circ}=\sigma\varphi\left(180^o-45^o\right)=-\sigma\varphi45^o=-1$, $\sigma\upsilon\nu240^o=\sigma\upsilon\nu\left(180^o+60^o\right)=-\sigma\upsilon\nu60^o=-\frac{1}{2}$

Άρα : $A=\dfrac{\eta\mu 135^o-\varepsilon\varphi 225^o+\sigma\upsilon\nu 120^o}{\eta\mu 225^o+\sigma\varphi 135^o+\sigma\upsilon\nu 240^o}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}-2-1}{2}}{\frac{-\sqrt{2}-2-1}{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}+3}$

$$-\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}{\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{2}-3\right)}=-\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}{-7}=\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}{7}$$

ii) $\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$, $\varepsilon\varphi(11\pi+\theta)=\varepsilon\varphi(10\pi+\pi+\theta)=\varepsilon\varphi(\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta$, $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

$$\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{12\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(6\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(17\pi+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(16\pi+\pi+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{18\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(9\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(8\pi+\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\varepsilon\varphi\theta$$

Επομένως $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(11\pi+\theta)\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(17\pi+\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2}+\theta\right)}=\dfrac{-\sigma\upsilon\nu\theta\left(\varepsilon\varphi\theta\right)\left(-\sigma\upsilon\nu\theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\theta\left(-\sigma\upsilon\nu\theta\right)\left(-\varepsilon\varphi\theta\right)}=1$

B. i) $\dfrac{\eta\mu^3\omega+\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{\eta\mu\omega\overbrace{\left(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)}^{1}}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\varepsilon\varphi\omega$

ii) $\left(1+\sigma\varphi\alpha\right)^2+\left(1-\sigma\varphi\alpha\right)^2=\left(1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)^2+\left(1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)^2=\left(\dfrac{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)^2=$

$$\frac{\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}+\frac{\eta\mu^2\alpha-2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}=$$

$$\frac{\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\alpha-2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}=\frac{2\overbrace{\left(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)}^{1}}{\eta\mu^2\alpha}=\frac{2}{\eta\mu^2\alpha}$$

Θέμα 4ο

A. α) $\begin{cases} f\left(0\right)=\beta+5 \\ f\left(\dfrac{4\pi}{\beta}\right)=4\beta^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha\sigma\upsilon\nu 0=\beta+5 \\ \alpha\sigma\upsilon\nu\left(\beta\dfrac{4\pi}{\beta}\right)=4\beta^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha\cdot 1=\beta+5 \\ \alpha\sigma\upsilon\nu 4\pi=4\beta^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha=\beta+5 \\ \alpha=4\beta^2 \end{cases}\Rightarrow$

$4\beta^2=\beta+5 \Rightarrow 4\beta^2-\beta-5=0, \Delta=81, \beta_{1,2}=\frac{1\pm 9}{8}=-1$, δεκτή ή $\frac{10}{8}$ απορρίπτεται αφού $\beta<0$

Για $\beta=-1$ θα είναι $\alpha=-1+5=4$

β) Άρα $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu(\beta x)=4\sigma\upsilon\nu(-x)=4\sigma\upsilon\nu x$ η οποία παίρνει μέγιστη τιμή $f_{\max}=4$, ελάχιστη τιμή $f_{\min}=-4$ και περίοδο $T=2\pi$

γ) $\varphi(x)=4\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-5$

δ) Επειδή είναι άρτια συνάρτηση θα ισχύει : $f(-a)=f(a)=\frac{\pi}{2013}$

B.i) $D=\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & -3\lambda\end{vmatrix}=-3\lambda-\lambda^2=-\lambda(\lambda+3)$

$D_x=\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ 2\lambda+3 & -3\lambda\end{vmatrix}=-3\lambda-\lambda(2\lambda+3)=-3\lambda-2\lambda^2-3\lambda=-2\lambda^2-6\lambda=-2\lambda(\lambda+3)$

$D_y=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda & 2\lambda+3\end{vmatrix}=2\lambda+3-\lambda=\lambda+3$

Αν $D\neq 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda+3)\neq 0 \Rightarrow \lambda\neq 0 \;\kappa\alpha\iota\; \lambda\neq -3$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x_o,y_o)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-2\lambda(\lambda+3)}{-\lambda(\lambda+3)},\frac{\lambda+3}{-\lambda(\lambda+3)}\right)=\left(2,-\frac{1}{\lambda}\right)$$

Αν $D=0 \Rightarrow \lambda=0 \;\acute{\eta}\; \lambda=-3$ το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις :

Για $\lambda=0$, $\begin{cases}x+\lambda y=1\\ \lambda x-3\lambda y=2\lambda+3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ 0=3\end{cases}$, αδύνατο

Για $\lambda=-3$, $\begin{cases}x+\lambda y=1\\ \lambda x-3\lambda y=2\lambda+3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-3y=1\\ -3x+9y=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-3y=1\\ x-3y=1\end{cases}$, το σύστημα έχει άπειρες

λύσεις της μορφής $(1+3k,k), k\in R$.

ii) Αν (x_o,y_o) η μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος να βρεθεί το λ ώστε να ισχύει :

$$\begin{vmatrix}-\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right) & 2\\ \lambda^2 & \lambda^4+4\end{vmatrix}=3\lambda^2 \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 2\\ \lambda^2 & \lambda^4+4\end{vmatrix}=3\lambda^2 \Rightarrow \lambda^4+4-2\lambda^2=3\lambda^2$$

$\lambda^4-5\lambda^2+4=0$, $\theta\acute{\epsilon}\tau\omega\; \lambda^2=y \Rightarrow y^2-5y+4=0 \Rightarrow y_{1,2}=1 \;\acute{\eta}\; 4$

Για $y = 1$ είναι $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ και για $y = 4$ είναι $\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$