ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 05 / 01 / 13

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 194

Β. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ. 213

Γ. $1 \to \Lambda$, $2 \to \Lambda$, $3 \to \Sigma$, $4 \to \Lambda$, $5 \to \Lambda$, $6 \to \Lambda$, $7 \to \Lambda$, $8 \to \Sigma$, $9 \to \Sigma$, $10 \to \Lambda$

ΘΕΜΑ 2ο

α)

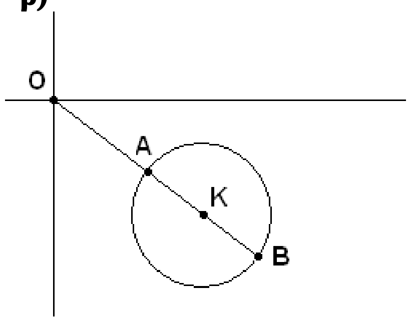
Έστω $w = x + yi$ οπότε $\overline{w} = x - yi$ και $|w|^2 = x^2 + y^2$

Οπότε $4\operatorname{Re}(w) + 4\operatorname{Im}(\overline{w}) = |w|^2 + 7 \Rightarrow 4x - 4y = x^2 + y^2 + 7 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$

Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-4)^2 + 4^2 - 4 \cdot 7 = 16 + 16 - 28 = 32 - 28 = 4 > 0$

Άρα είναι κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{-4}{2}\ ,\ -\frac{4}{2}\right) = (2\ ,\ -2)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

β)



Είναι $(OK) = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$|w|_{min} = (OA) = |(OK) - \rho| = 2\sqrt{2} - 1$

$|w|_{max} = (OB) = (OK) + \rho = 2\sqrt{2} + 1$

γ)

i)

Επειδή ο γεωμετρικός τόπος του w είναι κύκλος με $K(2\ ,\ -2)$ και $\rho = 1$ έχουμε ότι $|w - 2 + 2i| = 1$

Οπότε είναι $z(1 - 2i - w) = (w - 2)i \Rightarrow z - 2iz - zw = iw - 2i \Rightarrow z - 2iz + 2i = zw + iw \Rightarrow$

$$\Rightarrow z - 2iz + 2i = w(z+i) \Rightarrow \frac{z - 2iz + 2i}{z+i} = w \overset{+(-2+2i)}{\Rightarrow} \frac{z - 2iz + 2i}{z+i} - 2 + 2i = w - 2 + 2i \Rightarrow$$

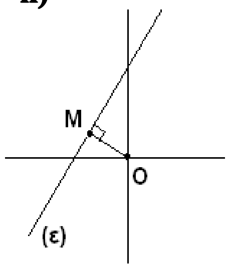
$$\Rightarrow \frac{z - 2iz + 2i + (-2+2i)(z+i)}{z+i} = w - 2 + 2i \Rightarrow \frac{z \cancel{-2iz} \cancel{+2i} - 2z \cancel{-2i} \cancel{+2iz} - 2}{z+i} = w - 2 + 2i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-z-2}{z+i} = w - 2 + 2i \Rightarrow \left|\frac{-(z+2)}{z+i}\right| = |w - 2 + 2i| \Rightarrow \frac{|z+2|}{|z+i|} = 1 \Rightarrow |z+2| = |z+i|$$

Έστω $z = x + yi$ οπότε είναι $|x + yi + 2| = |x + yi + i| \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1 \Rightarrow 4x - 2y + 3 = 0$$

ii)



Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{-4}{-2} = 2$

Έστω η ευθεία ΟΜ κάθετη στην (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Είναι $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OM} = -1 \Rightarrow 2\lambda_{OM} = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} = -\frac{1}{2}$. Άρα $OM: y = -\frac{1}{2}x$

Το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και ΟΜ

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon: 4x - 2y + 3 = 0 \\ OM: y = -\frac{1}{2}x \end{array}\right\} \Rightarrow 4x - 2\left(-\frac{1}{2}x\right) + 3 = 0 \Rightarrow 4x + x + 3 = 0 \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

Οπότε $y = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10}$.

Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι $z_0 = -\frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

α) Έστω ότι το $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \left|\frac{z-2}{2z-1}\right| = \ell$

Είναι $f^2(x) + \eta\mu^2 x = 2xf(x) \overset{:x^2 \neq 0}{\Rightarrow} \frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = \frac{2\cancel{x}f(x)}{x\cancel{^2}} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 2\frac{f(x)}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right] = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{f(x)}{x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \Rightarrow \ell^2 + 1^2 = 2\ell \Rightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ell - 1)^2 = 0 \Rightarrow \ell - 1 = 0 \Rightarrow \ell = 1$$

Οπότε $\left|\frac{z-2}{2z-1}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|z-2|}{|2z-1|} = 1 \Rightarrow |z-2| = |2z-1| \Rightarrow |z-2|^2 = |2z-1|^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (z-2)(\bar{z}-2) = (2z-1)(2\bar{z}-1) \Rightarrow z\bar{z} \cancel{-2z} \cancel{-2\bar{z}} + 4 \Rightarrow 4z\bar{z} \cancel{-2z} \cancel{-2\bar{z}} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|^2 + 4 = 4|z|^2 + 1 \Rightarrow 3|z|^2 = 3 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

β) Έχουμε ότι $|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $w = \bar{w}$

$$\bar{w} = \frac{(\bar{z}-i)^{10}}{\bar{z}^{10} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{z} - i\right)^{10}}{\left(\frac{1}{z}\right)^{10} - 1} = \frac{\left(\frac{1-iz}{z}\right)^{10}}{\frac{1}{z^{10}} - 1} = \frac{\frac{(1-iz)^{10}}{z^{10}}}{\frac{1-z^{10}}{z^{10}}} = \frac{\cancel{z^{10}}(1-iz)^{10}}{\cancel{z^{10}}(1-z^{10})} = \frac{[-i(i+z)]^{10}}{1-z^{10}} =$$

$$=\frac{(i)^{10}(z+i)^{10}}{-\left(z^{10}-1\right)}=\frac{-(z+i)^{10}}{-\left(z^{10}-1\right)}=\frac{(z+i)^{10}}{z^{10}-1}=w\ .\ \text{Άρα } w\in R$$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x^2-x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x(x-1)}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{(x-1)}\right]$ **(1)**

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(t)}{t}=1$

Θέτουμε $\eta\mu x=t$, όταν $x\to 0\Rightarrow t\to \eta\mu 0=0$

Οπότε από την **(1)**$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{0-1}=-1$

δ) Είναι $\left(5+|z+3-4i|\right)x=x^3+10\Rightarrow\left(5+|z+3-4i|\right)x-x^3-10=0$

Θέτουμε $h(x)=\left(5+|z+3-4i|\right)x-x^3-10$

Η h(x) είναι συνεχής στο $[1\ ,\ 2]$ ως πράξη συνεχών

$h(1)=5+|z+3-4i|-1-10=|z+3-4i|-6$

$h(2)=\left(5+|z+3-4i|\right)\cdot 2-2^3-10=\cancel{10}+2|z+3-4i|-8-\cancel{10}=2\left(|z+3-4i|-4\right)$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε :

$$\big||z|-|3-4i|\big|\le|z+3-4i|\le|z|+|3-4i|\overset{|3-4i|=5}{\Leftrightarrow}|1-5|\le|z+3-4i|\le 1+5\Leftrightarrow 4\le|z+3-4i|\le 6$$

Οπότε είναι $h(1)=|z+3-4i|-6\le 0$ και $h(2)=2\left(|z+3-4i|-4\right)\ge 0$ και ισχύει

$$h(1)\cdot h(2)\le 0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} h(1)\cdot h(2)=0\left\{\begin{array}{l} h(1)=0 \text{ οπότε το 1 είναι ρίζα της } h(x)\\ h(2)=0 \text{ οπότε το 2 είναι ρίζα της } h(x)\end{array}\right.\\ h(1)\cdot h(2)<0\Rightarrow \text{Από Θ.Bolzano υπάρχει } x_0\in(1\ ,\ 2) \text{ ώστε } h(x_0)=0\end{array}\right\}$$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[1\ ,\ 2]$ ώστε το $h(x_0)=0$

Β. Είναι $f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+2012\right]-\ln(x+2013)$, $x>-2012$, $\lambda\ge -1$

α) $f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+2012\right]-\ln(x+2013)\Rightarrow f(x)=\ln\left(\frac{(\lambda+1)x^2+x+2012}{x+2013}\right)$

Θέτω $\frac{(\lambda+1)x^2+x+2012}{x+2013}=t$ οπότε έχουμε

$$t_0=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+1)x^2+x+2012}{x+2013}=\left\langle\begin{array}{l}\text{Για } \lambda=-1\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2012}{x+2013}=1\\ \text{Για } \lambda>-1\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+1)x^2}{x}=+\infty\end{array}\right.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{(\lambda+1)x^2+x+2012}{x+2013}\right) = \begin{cases} \text{Για } \lambda=-1 \ \ \lim\limits_{t\to1}\ln t = 0 \ \text{ δεκτή} \\ \text{Για } \lambda>-1 \ \ \lim\limits_{t\to+\infty}\ln t = +\infty \ \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$

Οπότε για $\lambda=-1$ το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \in R$

β) Για $\lambda=-1$ είναι πλέον $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2012}{x+2013}\right)$

i)

Η f είναι συνεχής στο $(-2012\ ,\ +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Για το σύνολο τιμών της έχουμε $f((-2012\ ,\ +\infty)) \overset{f \text{ γν. αύξουσα}}{=} \left(\lim\limits_{x\to-2012^+} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

Θέτω $\dfrac{x+2012}{x+2013} = t$ οπότε έχουμε $t_0 = \lim\limits_{x\to-2012^+} \dfrac{x+2012}{x+2013} = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to-2012^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2012^+} \ln\left(\dfrac{x+2012}{x+2013}\right) = \lim\limits_{t\to0^+}\ln t = -\infty$

Θέτω $\dfrac{x+2012}{x+2013} = t$ οπότε έχουμε $t_0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2012}{x+2013} = 1$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+2012}{x+2013}\right) = \lim\limits_{t\to1}\ln t = 0$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty\ ,\ 0)$

ii)

$f(x) = 2013 \Rightarrow f(x) - 2013 = 0$ Θέτω $h(x) = f(x) - 2013$

Για $x_1 < x_2 \overset{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \overset{+(-2013)}{\Rightarrow} f(x_1) - 2013 < f(x_2) - 2013 \Rightarrow$

$\Rightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h(x)$ γνησίως αύξουσα

Το σύνολο τιμών της $h(x)$ είναι $h((-2012\ ,\ +\infty)) \overset{h \text{ γν. αύξουσα}}{=} \left(\lim\limits_{x\to-2012^+} h(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-2012^+} h(x) = \lim\limits_{x\to-2012^+} (f(x) - 2013) = \lim\limits_{x\to-2012^+} f(x) - 2013 = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2013) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2013 = 0 - 2013 = -2013$

Οπότε το σύνολο τιμών της h(x) είναι το $(-\infty\ ,\ -2013)$ και επειδή δεν περιέχει το 0 άρα η h(x) δεν έχει ρίζα στο διάστημα $(-2012\ ,\ +\infty)$

iii)

$$A = \int_0^1 e^{\ln\left(\frac{x+2012}{x+2013}\right)} dx = \int_0^1 \frac{x+2012}{x+2013} dx = \int_0^1 \frac{x+2013-1}{x+2013} dx = \int_0^1 \left(\frac{x+2013}{x+2013} - \frac{1}{x+2013}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+2013}\right) dx = [x]_0^1 - [\ln|x+2013|]_0^1 = 1 - 0 - (\ln 2014 - \ln 2013) = 1 - \ln\frac{2014}{2013}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Είναι $f(f(x))+f^3(x)=2x+3$ **(1)**

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$$
$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2) \quad \oplus$$

$$f(f(x_1))+f^3(x_1)=f(f(x_2))+f^3(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι "1 - 1"

β)

i) $f(g(x)-x)-f(\ln x+1)=0\Rightarrow f(g(x)-x)=f(\ln x+1)\overset{f\ \text{"1-1"}}{\Rightarrow} g(x)-x=\ln x+1\Rightarrow$
$\Rightarrow g(x)=\ln x+x+1 \quad , \quad x>0$

Έστω $x_1,x_2\in(0\ ,+\infty)$ με $x_1<x_2$

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+1<x_2+1$$
$$x_1<x_2\overset{\ln x\ \text{γν. αυξ.}}{\Rightarrow}\ln x_1<\ln x_2 \quad \oplus$$

$$\ln x_1+x_1+1<\ln x_2+x_2+1\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g(x)\ \text{γν. αύξουσα}\Rightarrow g\ \text{"1-1"}$$

ii) Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $(0\ ,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών

Άρα το πεδίο ορισμού της $g^{-1}(x)$ είναι το σύνολο τιμών της $g(x)$ οπότε :

$$A_{g^{-1}(x)}=g(A)=g((0\ ,+\infty))\overset{g\ \text{γν. αύξουσα}}{=}\left(\lim_{x\to0^+}g(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty}g(x)\right)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x+x+1)=\underbrace{\lim_{x\to0^+}\ln x}_{-\infty}+\underbrace{\lim_{x\to0^+}(x+1)}_{1}=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+x+1)=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\ln x}_{+\infty}+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}(x+1)}_{+\infty}=+\infty$

Οπότε το πεδίο ορισμού της $A_{g^{-1}(x)}=g(A)=(-\infty\ ,+\infty)$

iii) Επειδή το $\dfrac{2013}{2012}\in g(A)$ από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0\ ,+\infty)$ ώστε $g(x_0)=\dfrac{2013}{2012}$

iv)

$$g^{-1}(3g(|x|+1)-4)=1\Rightarrow g(g^{-1}(3g(|x|+1)-4))=g(1)\overset{g(1)=2}{\Rightarrow}3g(|x|+1)-4=2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3g(|x|+1)-4=2\Rightarrow 3g(|x|+1)=6\overset{:2}{\Rightarrow}g(|x|+1)=2\overset{g(1)=2}{\Rightarrow}g(|x|+1)=g(1)\overset{g\ \text{"1-1"}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow |x|+1=1\Rightarrow |x|=0\Rightarrow x=0$$

v) $x^2-4<\ln\left(\frac{x^2+7}{2x^2+3}\right)\Rightarrow x^2-4<\ln(x^2+7)-\ln(2x^2+3)\Rightarrow \ln(2x^2+3)+x^2-4<\ln(x^2+7)\overset{+(x^2+7)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \ln(2x^2+3)+x^2-4+x^2+7<\ln(x^2+7)+x^2+7\Rightarrow \ln(2x^2+3)+(2x^2+3)<\ln(x^2+7)+(x^2+7)\overset{+1}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \ln(2x^2+3)+(2x^2+3)+1<\ln(x^2+7)+(x^2+7)+1\Rightarrow g(2x^2+3)<g(x^2+7)\overset{g\ \text{γν. αυξ.}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 2x^2+3<x^2+7\Rightarrow 2x^2-x^2<7-3\Rightarrow x^2<4\Rightarrow |x|<2\Rightarrow -2<x<2$

vi) $I(\lambda)=\int_1^\lambda xg(x)dx=\int_1^\lambda(x^2+x\ln x+x)dx=\int_1^\lambda(x^2+x)dx+\int_1^\lambda x\ln x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_1^\lambda+\int_1^\lambda\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=$

$=\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^2}{2}-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)+\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^\lambda-\int_1^\lambda\frac{x^2}{2}(\ln x)'\,dx=\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda-\frac{1}{2}\cancel{\ln 1}^{0}-\int_1^\lambda\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=$

$=\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda-\frac{1}{2}\int_1^\lambda x\,dx=\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^\lambda=$

$=\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda-\frac{\lambda^2}{4}+\frac{1}{4}=$

$=\frac{4\lambda^3+6\lambda^2-4-6-3\lambda^2+3}{12}+\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda=\frac{4\lambda^3+3\lambda^2-7}{12}+\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda$

Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{I(\lambda)}{\lambda^2}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{4\lambda^3+3\lambda^2-7}{12\lambda^2}+\frac{\cancel{\lambda^2}\ln\lambda}{2\cancel{\lambda^2}}\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{4\lambda^3+3\lambda^2-7}{12\lambda^2}\right)+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{2}=+\infty$

Αφού $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{4\lambda^3+3\lambda^2-7}{12\lambda^2}\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{4\lambda^3}{12\lambda^2}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{3}\lambda=+\infty$

και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln\lambda=+\infty$