ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 24 /02 /13

ΘΕΜΑ 1

Α. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 135
Β. Κυκλώστε Σ για σωστή ή Λ για λάθος για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Λ , 2. Σ , 3. Λ , 4. Σ , 5. Λ , 6. Λ , 7. Λ , 8. Σ , 9. Λ , 10.Σ

Γ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση
1.Το $P(x)=(\lambda^2-1)x^3+(\lambda+1)x^2+\lambda-1$ είναι σταθερό πολυώνυμο όταν :
Γ. $\lambda=-1$
2. Η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x+3=0$ έχει λύσεις:
Δ. αδύνατη
3. Για το $Q(x)=(3-\alpha)x^2+(\alpha^2-4)x+\alpha+1$ και το $P(x)=5x+4$ είναι ίσα τότε το α είναι:
Β. $\alpha=3$
4. Αν $P(x)=(\kappa-2)x^3+(\kappa+1)x^2-\kappa+2$ διαιρείται με το $x+1$ τότε το κ είναι:
Α. $\kappa=5$
5. Αν $f(x)$ άρτια τότε το $f(1-x)$ είναι ίσο με:
Γ. $f(x-1)$

ΘΕΜΑ 2

Α. Δίνεται το πολυώνυμο:
$$P(x)=\lambda x^3+(\lambda-\mu)x^2-4\lambda x+3$$
Το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και η αριθμητική του τιμή για $x=-2$ είναι 15.
(α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$ και $\mu=-1$.
$$\begin{cases}P(1)=0\\P(-2)=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda+\lambda-\mu-4\lambda+3=0\\-8\lambda+4(\lambda-\mu)+8\lambda+3=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\lambda-\mu=-3\\-8\lambda+4\lambda-4\mu+8\lambda=12\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}-2\lambda-\mu=-3\\4\lambda-4\mu=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\lambda-2\mu=-6\\4\lambda-4\mu=12\end{cases}\quad \text{οπότε } -2\lambda+1=-3\Rightarrow\lambda=2$$
$$-6\mu=6\Rightarrow\mu=-1$$
(β) Δίνεται πολυώνυμο $Q(x)$ για το οποίο ισχύει:
$$(2x-1)Q(x)=P(x)$$
Από το α) ερώτημα προκύπτει $P(x)=2x^3+3x^2-8x+3$
Άρα για να ισχύει η σχέση $(2x-1)Q(x)=P(x)$ πρέπει $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\alpha\neq 0$
$$(2x-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=2x^3+3x^2-8x+3\Rightarrow$$
$$2\alpha x^3+2\beta x^2+2\gamma x-\alpha x^2-\beta x-\gamma=2x^3+3x^2-8x+3\Rightarrow$$

$2\alpha x^3+(2\beta-\alpha)x^2+(2\gamma-\beta)x-\gamma=2x^3+3x^2-8x+3\Rightarrow$

$2\alpha=2\Rightarrow\alpha=1$ και $2\beta-\alpha=3\Rightarrow 2\beta-1=3\Rightarrow\beta=2$ και $2\gamma-\beta=-8\Rightarrow 2\gamma-2=-8\Rightarrow\gamma=-3$

Άρα $\mathrm{Q}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}-3$

(ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\mathrm{P}(-1)\eta\mu^2\mathrm{x}-18\sigma\upsilon\nu\mathrm{x}=\mathrm{P}(\mathrm{Q}(-2))$

$P(-1)=2(-1)^3+3(-1)^2-8(-1)+3=-2+3+8+3=12$

$Q(-2)=(-2)^2+2(-2)-3=4-4-3=-3$

$P(Q(-2))=P(-3)=2(-3)^3+3(-3)^2-8(-3)+3=-54+27+24+3=0$

Άρα έχουμε την εξίσωση :

$12\eta\mu^2x-18\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow 2\eta\mu^2x-3\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow 2(1-\sigma\upsilon\nu^2x)-3\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow$

$2-2\sigma\upsilon\nu^2x-3\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x+3\sigma\upsilon\nu x-2=0$, $\Delta=25$,

$\sigma\upsilon\nu x=-2$ *αδύνατη* ή $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow x=2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$, $\kappa\in\mathrm{Z}$

Β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathrm{f(x)}=2\mathrm{x}^3+\alpha\mathrm{x}^2-17\mathrm{x}+4\alpha$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(3,-36)$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$.

Η $\mathrm{f(x)}=2\mathrm{x}^3+\alpha\mathrm{x}^2-17\mathrm{x}+4\alpha$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(3,-36)$ άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της : $-36=2\cdot 27+\alpha\cdot 3^2-17\cdot 3+4\alpha\Rightarrow -36=54+9\alpha-51+4\alpha\Rightarrow$
$-39=13\alpha\Rightarrow\alpha=-3$

(β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x .

Από το α) ερώτημα $\mathrm{f(x)}=2\mathrm{x}^3-3\mathrm{x}^2-17\mathrm{x}-12$

Για να βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x αρκεί $f(x)>0\Rightarrow$

$2x^3-3x^2-17x-12>0\Rightarrow(x+1)(2x^2-5x-12)>0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$

Με το σχήμα Horner για ρ = -1

2	-3	-17	-12	-1
↓	-2	5	12	
2	-5	-12	0	

ρίζες : $x+1=0\Rightarrow x=-1$ και $2x^2-5x-12=0\Rightarrow x_{1,2}=4\ ,\ -\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		4	$+\infty$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x^2-5x-12$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

επομένως $x\in\left(-\dfrac{3}{2},-1\right)\cup(4,+\infty)$

ΘΕΜΑ 3

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-2$ είναι 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$ είναι 4.

(α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R(x)=P(7-x)-4P(2x-6)$ έχει παράγοντα το $x-4$.

$P(2)=1$ και $P(3)=4$

$R(4)=P(7-4)-4P(8-6)=P(3)-4P(2)=4-4=0$, άρα έχει παράγοντα το $x-4$

(β) Δίνεται το πολυώνυμο $Q(x)=P(5-x)+P(x)$

(i) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $Q(x)$ με το x^2-5x+6.

Επειδή το x^2-5x+6 είναι 2ου βαθμού άρα το υπόλοιπο είναι το πολύ 1ου βαθμού
Οπότε το υπόλοιπο είναι της μορφής $\upsilon(x)=\alpha x+\beta$ και η ταυτότητα είναι :

$Q(x)=\left(x^2-5x+6\right)\pi(x)+ax+\beta$

(ii) Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές Q(2) και Q(3).

$Q(2)=P(3)+P(2)=4+1=5$

$Q(3)=P(2)+P(3)=1+4=5$

(iii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το x^2-5x+6.

$$\begin{cases}Q(2)=5\\Q(3)=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(2^2-5\cdot2+6\right)\pi(2)+\alpha\cdot2+\beta=5\\\left(3^2-5\cdot3+6\right)\pi(6)+\alpha\cdot6+\beta=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=5\\6\alpha+\beta=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-2\alpha-\beta=-5\\6\alpha+\beta=5\end{cases}$$

$4\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$ *και* $\beta=5$ *άρα* $\upsilon=5$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^4+\alpha x^2+\alpha+1}{x^2-16}$, $\alpha\in R$. Το σημείο $M(2,-1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$.

Το σημείο $M(2,-1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της : $-1=\dfrac{2^4+\alpha\cdot2^2+\alpha+1}{2^2-16}\Rightarrow-1=\dfrac{16+5\alpha+1}{-12}\Rightarrow5\alpha+17=12\Rightarrow5\alpha=-5\Rightarrow\alpha=-1$

Επομένως $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{x^2-16}$

(β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

$A_f = R-\{-4,4\}$, άρα για κάθε $x \in A_f$ $και$ $-x \in A_f$ και $f(-x)=\dfrac{(-x)^4-(-x)^2}{(-x)^2-16}=\dfrac{x^4-x^2}{x^2-16}=f(x)$

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \le 0$.

$$f(x)\le 0 \Rightarrow \frac{x^4-x^2}{x^2-16}\le 0 \Rightarrow \frac{x^2\left(x^2-1\right)}{x^2-16}\le 0 \Rightarrow x^2\left(x^2-1\right)\left(x^2-16\right)\le 0$$

x		-4		-1		0		1		4	
x^2	$+$	‖	$+$		$+$	0	$+$		$+$	‖	$+$
x^2-1	$+$	‖	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$
x^2-16	$+$	‖	$-$		$-$		$-$		$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$

Άρα $x\in(4,-1]\cup[1,4)$

(δ) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}\left(\sqrt{3}-2\right)=\mathrm{f}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+2}=\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}=\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}^2-4}=-\left(\sqrt{3}-2\right)$$

Άρα $\mathrm{f}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}\right)=\mathrm{f}\left[-\left(\sqrt{3}-2\right)\right]\overset{\mathrm{f:άρτια}}{=}\mathrm{f}\left(\sqrt{3}-2\right)$

(ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\mathrm{x}^3+4\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{f}(-2013)}{\mathrm{f}(2013)}\mathrm{x}-6=\mathrm{f}\left(\sqrt{3}-2\right)-\mathrm{f}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right)$$

$f(-2013)=f(2013)$, $επειδή$ f $άρτια$ και $\mathrm{f}\left(\sqrt{3}-2\right)=\mathrm{f}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}\right)$.

Επομένως προκύπτει η εξίσωση $\mathrm{x}^3+4\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-6=0$
Πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$
Με το σχήμα Horner για ρ = 1

1	4	1	−6	1
↓	1	5	6	
1	5	6	0	

$$\left(x-1\right)\left(x^2+5x+6\right)=0 \Rightarrow x=1 \;\; ή \;\; x^2+5x+6=0$$

$$x=-3 \;\; ή \;\; x=-2$$