ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 24/02/13

ΘΕΜΑ 1

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 90

Β. $1 \to \Lambda$, $2 \to \Lambda$, $3 \to \Lambda$, $4 \to \Sigma$, $5 \to \Sigma$, $6 \to \Lambda$, $7 \to \Lambda$, $8 \to \Sigma$, $9 \to \Lambda$, $10 \to \Lambda$

Γ. $1 \to B$, $2 \to \Gamma$, $3 \to \Gamma$, $4 \to A$, $5 \to A$

ΘΕΜΑ 2

Α.

α)

$$A = \left(\sqrt{3-\sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{3}-4}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{3}} + \sqrt{3\sqrt{3}-4}\right) = \left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\sqrt{3\sqrt{3}-4}\right)^2 =$$

$$= 3 - \sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 4 = 7 - 4\sqrt{3}$$

β)

$$B = \frac{1}{A} + 2006 - 4\sqrt{3} = \frac{1}{7-4\sqrt{3}} + 2006 - 4\sqrt{3} = \frac{7+4\sqrt{3}}{\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)} + 2006 - 4\sqrt{3} =$$

$$= \frac{7+4\sqrt{3}}{7^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} + 2006 - 4\sqrt{3} = \frac{7+4\sqrt{3}}{49-48} + 2006 - 4\sqrt{3} = 7 + \cancel{4\sqrt{3}} + 2006 - \cancel{4\sqrt{3}} = 2013$$

Β.i)

$$\lambda x - 3\lambda = \lambda^2 - 3x \Leftrightarrow \lambda x + 3x = \lambda^2 + 3\lambda \Leftrightarrow (\lambda+3)x = \lambda(\lambda+3) \quad (1)$$

1η περίπτωση: Αν ισχύει $\lambda + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -3$ τότε η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση:

$$(1) \Leftrightarrow (\lambda+3)x = \lambda(\lambda+3) \Leftrightarrow x = \frac{\lambda\cancel{(\lambda+3)}}{\cancel{(\lambda+3)}} \Leftrightarrow x = \lambda$$

2η περίπτωση: Αν ισχύει:

$\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$ τότε αντικαθιστούμε την τιμή του λ στην εξίσωση (1) και καταλήγουμε στην $0 \cdot x = 0$, η οποία είναι αόριστη.

ii)

α)

$$|2x+3| = |x+9| \Leftrightarrow (2x+3 = x+9 \text{ ή } 2x+3 = -x-9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x - x = 9 - 3 \text{ ή } 2x+3 = -9-3) \Leftrightarrow (x = 6 \text{ ή } x = -4)$$

β)

$$|-1+x| = -5$$

Η εξίσωση είναι αδύνατη , διότι $|-1+x| \geq 0$ και $-5 < 0$

γ)

$$||x+1| - 2| = 3$$

Αν θέσουμε $|x+1| - 2 = A(x)$ τότε έχουμε:

$$|A(x)| = 3 \Leftrightarrow A(x) = 3 \text{ ή } A(x) = -3$$

• Αν $A(x)=3$, τότε έχουμε:

$$|x+1|-2=3 \Leftrightarrow |x+1|=5 \Leftrightarrow (x+1=5 \quad ή \quad x+1=-5) \Leftrightarrow x=4 \quad ή \quad x=-6$$

• Αν $A(x)=-3$, ότε έχουμε:

$$|x+1|-2=-3 \Leftrightarrow |x+1|=-1, \text{ αδύνατη}$$

Άρα οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι $x=4$ και $x=-6$

δ)

Παρατηρούμε τα επόμενα:

• $|3x-9|=|3(x-3)|=|3|\cdot|x-3|=3|x-3|$

• $|6-2x|=|-2(x-3)|=|-2|\cdot|x-3|=2|x-3|$

Επομένως η αρχική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{4-5|x-3|}{12}-\frac{3|x-3|-3}{2}=2|x-3|-6$$

θέτουμε $|x-3|=\omega$ (1) οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{4-5\omega}{12}-\frac{3\omega-3}{2}=2\omega-6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{12}\cdot\frac{4-5\omega}{\cancel{12}}-\cancel{12}\cdot\frac{3\omega-3}{\cancel{2}}=12\cdot 2\omega-12\cdot 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-5\omega-6(3\omega-3)=24\omega-72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-5\omega-18\omega+18=24\omega-72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5\omega-18\omega-24\omega--72-18-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -47\omega=-94 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega=2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |x-3|=2 \Leftrightarrow (x-3=2 \text{ ή } x-3=-2) \Leftrightarrow (x=5 \text{ ή } x=1)$$

ε)

$$-2x^2+(\alpha-3)x+\alpha-1=0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(\alpha-3)^2-4\cdot(-2)\cdot(\alpha-1)=$$

$$=\alpha^2+2\alpha+1=(\alpha+1)^2>0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_1=\frac{-(\alpha-3)+\alpha+1}{-4}=\frac{-\alpha+3+\alpha+1}{-4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(\alpha-3)-\alpha-1}{-4}=\frac{-\alpha+3-\alpha-1}{-4}=\frac{\alpha-1}{2}$$

ΘΕΜΑ 3

Α.

α)

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda-2) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4\lambda + 8 =$

$= \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 \geq 0$

ισχύει οτι $\Delta \geq 0$ άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες

β)

i)

Ισχύουν

$x_1 + x_2 = \lambda - 1 \quad \text{και} \quad x_1 \cdot x_2 = \lambda - 2.$ Έχουμε:

ί) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 = (\lambda-1)^2 - 2(\lambda-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 5)$

ii)

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{\lambda-1}{\lambda-2} \Leftrightarrow 4(\lambda-2) = 5(\lambda-1) \Leftrightarrow 4\lambda - 8 = 5\lambda - 5 \Leftrightarrow \lambda = -3$$

iii)

$$P = 4S \Leftrightarrow \lambda - 2 = 4(\lambda-1) \Leftrightarrow \lambda - 2 = 4\lambda - 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Β.

Ισχύουν $x_1 + x_2 = 2$ και $x_1 \cdot x_2 = -4$

α) $\alpha = \left[(1+x_1)(1+x_2)\right]^{2013} = (1 + x_1 + x_2 + x_1\cdot x_2)^{2013} = (1+2-4)^{2013} = (-1)^{2013} = -1$

β) $A = (-x_1+2)(-x_2+2) = x_1\cdot x_2 - 2(x_1+x_2) + 4 = -4 - \cancel{4} + \cancel{4} = -4$

γ) $\bullet\, S = \frac{-1}{x_1} + \frac{-1}{x_2} = \frac{-(x_1+x_2)}{x_1\cdot x_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$\bullet\, P = \frac{-1}{x_1}\cdot\frac{-1}{x_2} = \frac{1}{x_1\cdot x_2} = -\frac{1}{4}$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 1 = 0$

Γ.

Οι αριθμοί x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \beta = 0$.

Επομένως σύμφωνα με τους τύπους Vieta, ισχύουν:

$\bullet S = x_1 + x_2 = -\alpha$

$\bullet P = x_1 \cdot x_2 = \beta$

Επίσης η εξίσωση $x^2 - (\alpha^2 - 1)x - 5\alpha\beta = 0$

έχει ρίζες τους αριθμούς $2x_1 - 1$ και $2x_2 - 1$ άρα

$\bullet S_1 = 2x_1 - 1 + 2x_2 - 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 2(x_1 + x_2) - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 2\cdot(-\alpha) - 2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

$\bullet P_1 = (2x_1 - 1)\cdot(2x_2 - 1) \Leftrightarrow -5\alpha\beta = 4x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5\alpha\beta = 4\cdot\beta - 2\cdot(-\alpha) + 1 \Leftrightarrow 5\beta = 4\beta - 2 + 1 \Leftrightarrow \beta = -1$

ΘΕΜΑ 4

Α.

i)

$x(x^2 - x - 6)(x^2 - x + 2) < 0$

Βρίσκουμε που μηδενίζει ο κάθε παράγοντας:

$x = 0$

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -2$

$x^2 - x + 2 = 0,\ \ \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$ άρα αδύνατη

x	$-\infty$	-2		0		3	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-x-6	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^2-x+2	$+$		$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

άρα $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 3)$

ii)

$\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 2$

Πρέπει $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

$\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 2 \Rightarrow \dfrac{3x-1}{x+2} - 2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{3x-1-2x-4}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x-5}{x+2} \geq 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) \geq 0$

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

x	$-\infty$	-2		5	$+\infty$
$x-5$	$-$	‖	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$+$	‖0	$-$	0	$+$

Άρα $x \in (-\infty, -2) \cup [5, +\infty)$

Β.

α)

Είναι $A = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + 5\lambda + 10$ και $B = x^2 + 4x + 4\lambda + 16$

Το Α έχει ρίζα το $x = 2$. Οπότε για $x = 2$ έχουμε

$$2^2 + 2\lambda \cdot 2 + \lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0 \Rightarrow 4 + 4\lambda + \lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 81 - 56 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-9+5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\[2ex] \dfrac{-9-5}{2} = \dfrac{-14}{2} = -7 \end{array} \right.$$

Το Β αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.

Άρα $\Delta \geq 0 \Rightarrow 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4\lambda + 16) \geq 0 \Rightarrow 16 - 16\lambda \cdot 64 \geq 0 \Rightarrow -16\lambda - 48 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -16\lambda \geq 48 \Rightarrow \lambda \leq \frac{48}{-16} \Rightarrow \lambda \leq -3$$

Επειδή $\lambda = -7$ ή $\lambda = -2$ και $\lambda \leq -3$. Άρα $\lambda = -7$.

β) Για $\lambda = -7$ είναι:

$$A = x^2 + 2(-7)x + (-7)^2 + 5(-7) + 10 = x^2 - 14x + 49 - 35 + 10 = x^2 - 14x + 24$$

$$B = x^2 + 4x + 4(-7) + 16 = x^2 + 4x - 28 + 16 = x^2 + 4x - 12$$

Οπότε έχουμε $\dfrac{A}{B} = \dfrac{x^2 - 14x + 24}{x^2 + 4x - 12}$

Είναι $x^2 - 14x + 24 = 0$ έχει $\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 196 - 96 = 100$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{14 \pm 10}{2} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{14+10}{2} = \dfrac{24}{2} = 12 \\[2ex] \dfrac{14-10}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{array} \right.$$

Είναι $x^2 + 4x - 12 = 0$ έχει $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-4+8}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\[2ex] \dfrac{-4-8}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6 \end{array} \right.$$

Άρα είναι $\dfrac{A}{B} = \dfrac{(x-12)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+6)} = \dfrac{x-12}{x+6}$

γ) Είναι $A + 25 = x^2 - 14x + 24 + 25 = x^2 - 14x + 49$

Έχει $\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49 = 196 - 196 = 0$, οπότε έχει μια διπλή λύση $x_0 = \dfrac{14}{2} = 7$

Άρα $x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$

(β τρόπος : παρατηρώ ότι είναι ανάπτυγμα ταυτότητας)

Είναι $B + 16 = x^2 + 4x - 12 + 16 = x^2 + 4x + 4$

Οπότε $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

(β τρόπος : βρίσκω $\Delta = 0$ και μια διπλή λύση $x_0 = -2$)