σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: ....

ΟΝΟΜΑ: ....

ΤΜΗΜΑ: ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ....

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 05-01-12

ΘΕΜΑ 1^{O}

Α1. Να αποδείξετε ότι $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ να αποδείξετε ότι

1) Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$ είναι παράγουσες τις f στο σύνολο Δ και
2) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c \;,\; c \in R$.

Μονάδες 6

Β. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της

Μονάδες 2

Γ. Συμπληρώστε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις :

1) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_o τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχείς στο x_o .
2) Μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ δεν μπορεί να έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta) = R$
3) Αν για τις συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.
4) Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = m$ $\ell, m \in R$ και $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_o τότε ισχύει $\ell \leq m$.

5) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f^2(x)=\ell$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\pm\ell$

6) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{g(x)}{f^2(x)}=-\infty$

7) Αν $z_1,z_2\in C$ με $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=0$ τότε ισχύει $\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)=0$

8) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=0$ και $f(\beta)=1$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_o)=\ln 2$.

9) Οι συναρτήσεις $f\circ f^{-1}$ και $f^{-1}\circ f$ είναι ίσες.

10) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = x\cdot f(x)-\int_\alpha^\beta x\cdot f'(x)dx$

11) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<f(\beta)$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(\alpha)\,,\ f(\beta)]$

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,4]\to R$ συνεχής και γνησίως μονότονη. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τα άξονα yy' στο σημείο με τεταγμένη 5 και ισχύει

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-4x)f(x)+\eta\mu(x-4)}{\sqrt{x-3}-1}=18$$

α) Να βρείτε την τιμή $f(4)$.
β) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f και το σύνολο τιμών της .
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο .
δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε

$$3f(\xi)=f(1)+f(2)+f(3)$$

Μονάδες 3+3+4+4

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί $z,w\in C$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$z\bar{z}+i(z-\bar{z})=1 \quad \text{και} \quad (w-3)^3=\frac{2010+2011i}{2011+2010i}$$

α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_1 των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.
β) να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w βρίσκονται σε κύκλο C_2
γ) Αν $A(z)\in C_1$ και $B(w)\in C_2$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$.

Μονάδες 3+4+4

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Α. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο R , με σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύει $f^3(x)+3f(x)=x+5$ για κάθε $x\in R$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να εξηγήσετε γιατί η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} τέμνονται σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0\in(1\,,\,2)$

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)\cdot ημx}{x^4}$

Μονάδες 1+2+2+2

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ότι η f είναι 1-1.

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $f^{-1}(x)=\left(e^{x-1}-1\right)^2+1$.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι η h έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(1,+\infty)$ όπου $h(x)=f(x)-2$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1)=3$ και

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_1^2|z|e^{f(x^2+1)}dx$ όπου $z=-3-4i$

στ) Έστω $g(x)=\ln x+1$ να βρεθεί η $f^{-1}\circ g$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x+1)$ και $f^{-1}\left(g(x)\right)$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο διάστημα (1,2).

Μονάδες 1+2+3+4+4+4

ΘΕΜΑ 4^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x}+x-2$, $x\in R$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $e^{\alpha}+\alpha=2$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της f στο R .

δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ $\alpha,\beta\in R$ για τους οποίους ισχύει

$$f\left(|z-i|+\frac{1}{2}\right)=e-1$$

ε) Αν οι εικόνες των z_1,z_2 βρίσκονται στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο να βρείτε την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(|z_1-z_2|-\sqrt{2}\right)\cdot\left(f(x)+f(-x)\right)\right]$$ Μονάδες 3+5+5+5+7

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Κ Α Λ Η Χ Ρ Ο Ν Ι Α Κ Α Ι Χ Ρ Ο Ν Ι Α Π Ο Λ Λ Α