σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΕΠΩΝΥΜΟ: . . . .

ΟΝΟΜΑ: . . . .

ΤΜΗΜΑ: . . . .

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: . . . .

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 19-04-12

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε κάποιο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 8

Α2. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Μονάδες 3

Α3. Να χαρακτηρίσετε με σωστό **(Σ)** ή λάθος **(Λ)** τις παρακάτω προτάσεις :

1. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της τότε η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της βρίσκεται κάτω από την C_f .

2. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτηση f , μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

3. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε κάποιο διάστημα Δ τότε ισχύει πάντα $f''(x) < 0$ για $x \in \Delta$.

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$ τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

5. Ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$

6. Αν η f είναι συνεχής τότε θα ισχύει $\int_0^1 f(x+2012)dx = \int_{2012}^{2013} f(x)dx$

7. Αν $f(x) = x^2 + g(x) - 1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ τότε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις C_f και Cg είναι $\frac{2}{3}$.

Μονάδες 14

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z = 2\left(\sqrt{2} - \frac{2}{z}\right)$, $z \in C^*$ **(1)**

Β1. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης **(1)** είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ και $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Μονάδες 4

Β2. Να βρεθούν οι θετικές ακέραιες τιμές του ν, για τις οποίες ισχύει η σχέση : $z_1^{\nu} + z_2^{\nu} = 0$

Μονάδες 4

Β3. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y που επαληθεύουν την ισότητα :

$$\frac{1}{x+yi} + (-i)^{2011} = i^{-16} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2}$$

Μονάδες 4

Β4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z - z_1^2| = |z - z_2^4|$ καθώς και ο μιγαδικός z_0 που έχει το μικρότερο μέτρο

Μονάδες 8

Β5. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του $|z + 7 - i|$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση f(x) συνεχής στο R και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x): R \to R$ με $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, $x \in R$, $t \in R$ και οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει $|z - 2 + i| = |z + 2 - i|$ **(1)**

Γ1. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$

Μονάδες 5

Γ2. Αν η ευθεία (ε) είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρείτε το $\kappa \in R$ αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{xf\left(\frac{1}{x}\right)-5x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+\kappa}{f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}+2}\right)=10$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u)du & , \ x\neq 0\\ f(0) & , \ x=0\end{cases}$

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρεθεί η $g'(x)$

Μονάδες 5

Γ5. Αν ο μιγαδικός $z=\int_1^2 f(t)dt+i\int_0^2 f(t)dt$ ικανοποιεί τη σχέση **(1)** να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1\,,\,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=f(\xi)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η πραγματική συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο R για την οποία ισχύει $\displaystyle\int_1^{x^2}\frac{f(xt)}{x\cdot|x|}dt \geq x^2-1$ για κάθε $x\in R-\{0\}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\alpha(x)=\int_x^{x^3}f(t)dt$ παραγωγίζεται και να βρείτε την παράγωγο $\alpha'(x)$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(1)=1$ και $f(-1)=-1$

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε την παράγωγο της $\alpha(x)$ στο $x_0 = 0$ και να δείξετε ότι $f(0) = 0$

Μονάδες 7

Δ4. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη , να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής

Μονάδες 8

Διάρκεια 3 ώρες

<u>Κ Α Λ Η   Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α</u>
<u>Σ Τ Ι Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ</u>