



ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ : 270727 – 222594  
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ : 919113 – 949422  
[www.syghrono.gr](http://www.syghrono.gr)

ΕΠΩΝΥΜΟ: .....

ΟΝΟΜΑ: .....

ΤΜΗΜΑ: .....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: .....

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ 19 / 04 / 12

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $c: x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $M(x_1, y_1)$  είναι η ευθεία  $\varepsilon: xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Μονάδες 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

1. Ισχύει ότι  $\overline{AB} - \overline{AG} = \overline{BG}$

2. Αν για τα διανύσματα  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  ισχύει ότι  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  τότε είναι πάντοτε  $\vec{u} = 0$  ή  $\vec{v} = 0$

3. Η ευθεία  $\varepsilon: x - y + 2 = 0$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (-1, -1)$

4. Η απόσταση του σημείου  $M(x_1, y_1)$  από την ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$  δίνεται από τον τύπο

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

5. Για να είναι εξίσωση κύκλου η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  πρέπει  $A^2 + B^2 + 4\Gamma > 0$

6. Η εξίσωση  $c: x^2 = 2py$ ,  $p \neq 0$  παριστάνει παραβολή με εστία  $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

7. Η εφαπτομένη της παραβολής  $c: x^2 = 2py$ ,  $p \neq 0$  στο σημείο  $M(x_1, y_1)$  είναι η ευθεία

$$\varepsilon: xx_1 = p(y + y_1)$$

8. Για την εκκεντρότητα μιας έλλειψης ισχύει πάντα  $\varepsilon < 1$

9. Η ευθεία  $\varepsilon: ax + by = 0$  είναι ασύμπτωτη της υπερβολής με εξίσωση  $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$

10. Η ισοσκελής υπερβολή έχει εκκεντρότητα  $\varepsilon = 1$

Μονάδες 10

Γ. Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1. Το σημείο  $M(-1, 1)$  απέχει από την ευθεία  $\varepsilon: 2x + 3y - 1 = 0$  απόσταση ίση με :

- A. 1      B. -1      Γ. 0      Δ. 2      E. -2

2. Αν τα σημεία  $A(1, 3)$ ,  $B(-1, 2)$  και  $\Gamma(x^2, 4)$  αποτελούν κορυφές τριγώνου με εμβαδό ίσο με 3 τ.μ. τότε η τιμή του  $x$  είναι :

- A.  $x=1$  ή  $x=2$       B.  $x=1$  ή  $x=-1$       Γ.  $x=-2$  ή  $x=1$   
Δ.  $x=3$  ή  $x=-3$       E.  $x=\sqrt{3}$  ή  $x=-\sqrt{3}$

3. Η παραβολή με εξίσωση  $4x^2 - y = 0$  έχει εστία  $E$  που είναι το σημείο :

- A.  $E\left(0, \frac{1}{16}\right)$       B.  $E\left(0, -\frac{1}{16}\right)$       Γ.  $E(0, 2)$   
Δ.  $E(0, -2)$       E.  $E(2, 0)$

4. Η έλλειψη  $c: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  έχει εστίες  $E'$  και  $E$  με συντεταγμένες :

- A.  $E'(0, -4)$ ,  $E(0, 4)$       B.  $E'(0, -3)$ ,  $E(0, 3)$       Γ.  $E'(0, -5)$ ,  $E(0, 5)$   
Δ.  $E'(-4, 0)$ ,  $E(4, 0)$       E.  $E'(-3, 0)$ ,  $E(3, 0)$

5. Η υπερβολή  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  έχει εκκεντρότητα ίση με :

- A.  $\varepsilon = \sqrt{5}$       B.  $\varepsilon = \sqrt{3}$       Γ.  $\varepsilon = 2$   
Δ.  $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$       E.  $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{5}$

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν :  $|\vec{\alpha}| = 4$ ,  $|\vec{\beta}| = 5$  και  $(3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 3$

α. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$

**Μονάδες 6**

β. Να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$

**Μονάδες 6**

γ. Θεωρούμε επίσης τα διανύσματα  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{\delta} = \vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$

i) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$

**Μονάδες 6**

ii) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + (\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta})\vec{\beta}$  και  $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$  να είναι κάθετα

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 2x + \alpha y - 3 = 0$  και  $\varepsilon_2 : \beta x + 4y + \gamma = 0$ , με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  οι οποίες είναι κάθετες και τέμνονται στο σημείο  $A(2, 1)$

**α.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$  και  $\gamma = -8$

**Μονάδες 5**

**β.** Θεωρούμε επίσης τα σημεία  $B(3, 8)$  και  $\Gamma(10, -13)$  και έστω η ευθεία  $(\varepsilon_3)$  που διέρχεται από τα σημεία αυτά

**i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon_3)$  είναι  $\varepsilon_3 : y = -3x + 17$

**Μονάδες 5**

**ii)** Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_3$

**Μονάδες 5**

**iii)** Να βρείτε το σημείο  $M$  της ευθείας  $\varepsilon_3$  που ισαπέχει από τις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$

**Μονάδες 5**

**iv)** Αν είναι  $M(5, 2)$ , να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το  $M$  και απέχουν από το σημείο  $\Gamma$  απόσταση ίση με 5

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  και η εξίσωση :

$$x^2 + y^2 - 4|\vec{\alpha}|x + 6|\vec{\beta}|y + 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \quad (1)$$

**α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο με ακτίνα  $\rho = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$

**Μονάδες 5**

**β.** Έστω  $(c)$  ο κύκλος που παριστάνει η εξίσωση **(1)**. Δίνεται ότι το κέντρο του κύκλου  $(c)$

ανήκει στην ευθεία  $\zeta : 2x + 3y + 2 = 0$  και η εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  του  $(c)$  στο σημείο  $\Lambda(|\vec{\alpha}|, -6|\vec{\beta}|)$

έχει συντελεστή διεύθυνσης  $-\frac{2}{3}$

**i)** Να αποδείξετε ότι  $|\vec{\alpha}| = 4$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και η γωνία των διανυσμάτων είναι  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$

**Μονάδες 5**

**ii)** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{v} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 11\vec{\beta}$  είναι κάθετα

**Μονάδες 5**

**iii)** Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{w} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

**Μονάδες 5**

**iv)** Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία που τέμνει τον άξονα  $x'x$

**Μονάδες 5**

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ  
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**