ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 5/1/12

ΘΕΜΑ 1ο

Α₁. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 225
Α₂. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 304
Β. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 213
Γ.
$1 \to \Lambda$, $2 \to \Sigma$, $3 \to \Lambda$, $4 \to \Sigma$, $5 \to \Lambda$, $6 \to \Sigma$, $7 \to \Sigma$, $8 \to \Sigma$, $9 \to \Lambda$, $10 \to \Lambda$, $11 \to \Lambda$

ΘΕΜΑ 2ο

Α.
Είναι $f:[0\,,\,4] \to R$ συνεχής και γνησίως μονότονη
Επειδή τέμνει τον y΄y στο σημείο (0 , 5) ισχύει f(0) = 5

α) Επειδή η f συνεχής ισχύει ότι $f(4) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

Θέτω $g(x) = \dfrac{(x^2-4x)f(x)+\eta\mu(x-4)}{\sqrt{x-3}-1} \Rightarrow g(x)\left(\sqrt{x-3}-1\right) = (x^2-4x)f(x)+\eta\mu(x-4) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x)\left(\sqrt{x-3}-1\right)-\eta\mu(x-4) = (x^2-4x)f(x)$

Για $x \neq 4$ είναι $f(x) = \dfrac{g(x)\left(\sqrt{x-3}-1\right)-\eta\mu(x-4)}{x^2-4x}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{g(x)\left(\sqrt{x-3}-1\right)-\eta\mu(x-4)}{x^2-4x} = \lim\limits_{x\to 4^-} g(x)\cdot \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-4x} - \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\eta\mu(x-4)}{x^2-4x}$ **(1)**

Είναι $\lim\limits_{x\to 4^-} g(x) = 18$

Είναι $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-4x} = \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{(x^2-4x)\left(\sqrt{x-3}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x-3-1}{(x^2-4x)\left(\sqrt{x-3}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\cancel{x-4}}{x\,(\cancel{x-4})\left(\sqrt{x-3}+1\right)} = \dfrac{1}{4\left(\sqrt{4-3}+1\right)} = \dfrac{1}{4\cdot 2} = \dfrac{1}{8}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\eta\mu(x-4)}{x^2-4x} = \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\eta\mu(x-4)}{x(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\eta\mu(x-4)}{x-4}$

Θέτω $x-4 = t \Rightarrow x = t+4$ Οπότε για $x \to 4 \Rightarrow x-4 \to 0 \Rightarrow t \to 0$

Έχουμε $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t+4}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\eta\mu t}{t}=\dfrac{1}{0+4}\cdot 1=\dfrac{1}{4}$

Οπότε από **(1)** $\Rightarrow f(4)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=18\cdot\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{18}{8}-\dfrac{2}{8}=\dfrac{16}{8}=2$

β) Είναι f(0) = 5 και f(4) = 2 και η f γνησίως μονότονη
Επειδή για $0<4\Rightarrow f(0)>f(4)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα
Οπότε το σύνολο τιμών είναι $f(A)=\left[f(4)\ ,\ f(0)\right]=\left[2\ ,\ 5\right]$

γ)
Το σημείο τομής της y = 4 με την γραφική παράσταση της f είναι η λύση της εξίσωσης f(x) = 4
Επειδή το 4 ανήκει στο σύνολο τιμών της f , από το Θεωρ. Ενδ. Τιμών υπάρχει 1 τουλάχιστον x_1 ώστε $f\left(x_1\right)=4$
Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη είναι και «1 – 1» το x_1 μοναδικό

δ)
Η f γνησίως φθίσουσα και είναι $A=\left[0\ ,\ 4\right]$ και $f(A)=\left[2\ ,\ 5\right]$ οπότε ισχύει $2\le f(x)\le 5$

$$\begin{aligned}
&\text{Για } x=1 \quad 2\le f(1)\le 5\\
&\text{Για } x=2 \quad 2\le f(2)\le 5\\
&\text{Για } x=3 \quad 2\le f(3)\le 5 \ \oplus
\end{aligned}$$

$$6\le f(1)+f(2)+f(3)\le 15 \overset{:3}{\Rightarrow} 2\le\frac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}\le 5\Rightarrow f(4)\le\frac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}\le f(0)$$

Δηλαδή το $\dfrac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών οπότε από το Θεωρ. Ενδ. Τιμών υπάρχει $\xi\in(0\ ,4)$ ώστε να ισχύει $f(\xi)=\dfrac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}\Rightarrow 3f(\xi)=f(1)+f(2)+f(3)$

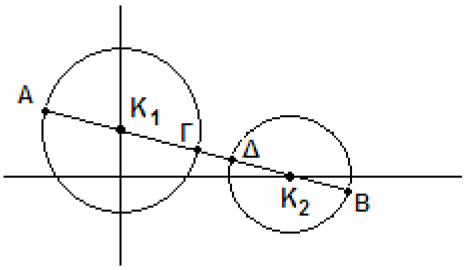
B.
α) Έστω $z=x+yi$
Είναι $z\overline{z}+i\left(z-\overline{z}\right)=1\Rightarrow\left|z\right|^2+i\cdot 2\,\mathrm{Im}(z)=1\Rightarrow x^2+y^2+i\cdot 2yi=1\Rightarrow x^2+y^2-2y-1=0$
Έχουμε $A^2+B^2-4\Gamma=0^2+(-2)^2-4(-1)=4+4=8$
Οπότε είναι κύκλος με κέντρο $K_1\left(-\dfrac{A}{2}\ ,\ -\dfrac{B}{2}\right)=\left(0\ ,\ 1\right)$ και ακτίνα $\rho_1=\dfrac{\sqrt{8}}{2}=\dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\sqrt{2}$

β) Είναι $\left(w-3\right)^3=\dfrac{2010+2011i}{2011+2010i}\Rightarrow\left|\left(w-3\right)^3\right|=\left|\dfrac{2010+2011i}{2011+2010i}\right|\Rightarrow\left|w-3\right|^3=\dfrac{\left|2010+2011i\right|}{\left|2011+2010i\right|}\Rightarrow$

$$\Rightarrow |w-3|^3 = \frac{\sqrt{2010^2+2011^2}}{\sqrt{2011^2+2010^2}} \Rightarrow |w-3|^3 = 1 \Rightarrow |w-3| = \sqrt[3]{1} \Rightarrow |w-3| = 1$$

Οπότε είναι κύκλος με κέντρο $K_2 = (3\ ,\ 0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$

γ) Είναι $(K_1K_2) = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ και $\rho_1 + \rho_2 = \sqrt{2}+1$



Επειδή $(K_1K_2) > \rho_1 + \rho_2$ οι δύο κύκλοι δεν τέμνονται
Οπότε έχουμε
$$|z-w|_{max} = (AB) = (K_1K_2) + \rho_1 + \rho_2 = \sqrt{10}+\sqrt{2}+1$$
Και
$$|z-w|_{min} = (\Gamma\Delta) = |(K_1K_2) - \rho_1 - \rho_2| = \left|\sqrt{10}-\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{10}-\sqrt{2}-1$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

α) Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα
Τότε για $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ πρέπει να ισχύει

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) \ge f^3(x_2)$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \xRightarrow{\cdot 3} 3f(x_1) \ge 3f(x_2) \oplus$$
$$\overline{}$$
$$f^3(x_1) + 3f(x_1) \ge f^3(x_2) + 3f(x_2) \Rightarrow x_1 \cancel{+5} \ge x_2 \cancel{+5} \Rightarrow x_1 \ge x_2$$

Έχουμε τελικά για $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \ge x_2$ άτοπο . Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι «1-1» οπότε αντιστρέφεται
Είναι $f^3(x) + 3f(x) = x + 5 \Rightarrow f^3(x) + 3f(x) - 5 = x$
Ισχύει ότι $y = f(x)$. Οπότε έχουμε :

$$\left.\begin{matrix} y^3 + 3y - 5 = x \\ f^{-1}(y) = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow f^1(y) = y^3 + 3y - 5$$. Άρα είναι $f^{-1}(x) = x^3 + 3x - 5$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχει με την f^{-1} ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$.
Οπότε το κοινό σημείο των f και f^{-1} βρίσκεται από το σύστημα των εξισώσεων

$$\left.\begin{matrix} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow f^{-1}(x) = x \Rightarrow x^3 + 3x - 5 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 5 = 0$$

Έστω η συνάρτηση $h(x)=x^3+2x-5$

Η $h(x)$ συνεχής στο $[1\ ,\ 2]$ ως πολυωνυμική

$$\left.\begin{array}{l} h(1)=1^3+2\cdot 1-5=-2<0 \\ h(2)=2^3+2\cdot 2-5=7>0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(1)\cdot h(2)<0$$

Οπότε από το Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0\in(1\ ,\ 2)$ ώστε το x_0 να είναι ρίζα της $h(x)$

Για $x_1, x_2\in R$

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^{\ 3}<x_2^{\ 3}$$
$$x_1<x_2\Rightarrow 2x_1<2x_2 \oplus$$

$$x_1^{\ 3}+2x_1<x_2^{\ 3}+2x_2 \overset{+(-5)}{\Rightarrow} x_1^{\ 3}+2x_1-5<x_2^{\ 3}+2x_2-5\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Οπότε η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα μοναδική

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)\cdot ημx}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^3+3x-5)ημx}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\cdot ημx\right]$

Ισχύει ότι $\left|\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\cdot ημx\right|=\left|\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\right|\cdot|ημx|$ και είναι $|ημx|\le 1$

Άρα έχουμε $\left|\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\cdot ημx\right|\le\left|\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\right|\Rightarrow-\left|\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\right|\le\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\cdot ημx\le\left|\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\right|$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{x^3}{x^4}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{x}\right|\right)=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\dfrac{x^3}{x^4}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\dfrac{1}{x}\right|\right)=0$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+3x-5}{x^4}\cdot ημx\right]=0$

Β.

Α) Πρέπει $x-1\ge 0\Rightarrow x\ge 1$ και $\sqrt{x-1}+1>0\Rightarrow\sqrt{x-1}>-1$ που ισχύει . Άρα $A_f=[1\ ,\ +\infty)$

Β) Έστω $x_1,x_2\in[1\ ,\ +\infty)$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow\sqrt{x_1-1}<\sqrt{x_2-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{x_1-1}+1<\sqrt{x_2-1}+1\Rightarrow\ln\left(\sqrt{x_1-1}+1\right)<\ln\left(\sqrt{x_2-1}+1\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\ln\left(\sqrt{x_1-1}+1\right)<1+\ln\left(\sqrt{x_2-1}+1\right)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $[1\ ,\ +\infty)$ οπότε είναι και «1 – 1»

Γ) $y=f(x)\Rightarrow y=1+\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)\Rightarrow y-1=\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)\Rightarrow e^{y-1}=\sqrt{x-1}+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{x-1}=e^{y-1}-1\Rightarrow x-1=\left(e^{y-1}-1\right)^2\Rightarrow x=\left(e^{y-1}-1\right)^2+1$

Επειδή $e^{y-1}-1=\sqrt{x-1}$ πρέπει $e^{y-1}-1\ge 0\Rightarrow e^{y-1}\ge 1\Rightarrow e^{y-1}\ge e^0\Rightarrow y-1\ge 0\Rightarrow y\ge 1$

Επίσης επειδή $x\ge 1$ πρέπει $\left(e^{y-1}-1\right)^2\cancel{+1}\ge\cancel{1}\Rightarrow\left(e^{y-1}-1\right)^2\ge 0$ που ισχύει

Οπότε το σύνολο τιμών $f(A)=[1\ ,\ +\infty)$

$$\left.\begin{aligned}x&=\left(e^{y-1}-1\right)^2+1\\ x&=f^{-1}(y)\end{aligned}\right\}\Rightarrow f^{-1}(y)=\left(e^{y-1}-1\right)^2+1\ .$$

Οπότε $f^{-1}(x)=\left(e^{x-1}-1\right)^2+1$ με πεδίο ορισμού $A_{f^{-1}}=[1\ ,+\infty)$

Δ) Είναι $f(A)=[1\ ,\ +\infty)$ (Από το προηγούμενο ερώτημα)

Έχουμε $h(x)=f(x)-2\Rightarrow h(x)=1+\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)-2\Rightarrow h(x)=\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)-1$

Ισχύει ότι $A_h=[1\ ,\ +\infty)$

Επίσης η h(x) είναι γνησίως αύξουσα γιατί αφού η f(x) γνησίως αύξουσα ισχύει :

$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f(x_1)-2<f(x_2)-2\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$

Το σύνολο τιμών της $h(x)$ είναι $h\left([1\ ,\ +\infty)\right)\overset{\text{h γν. αύξουσα}}{=}\left[h(1)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)$

Είναι $h(1)=\ln\left(\sqrt{1-1}+1\right)-1=\ln 1-1=0-1=-1$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)\right]-1$

Θέτω $\underset{x\to+\infty\ ,\ t\to+\infty}{\sqrt{x-1}+1=t}$

Οπότε είναι $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t-1=+\infty-1=+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών $h(A)=[-1\ ,\ +\infty)$

Επειδή το σύνολο τιμών της h(x) περιέχει την τιμή 0 και επειδή η h(x) είναι γνησίως αύξουσα , η ρίζα είναι μοναδική .

Ε) $f^{-1}(x+1)=3\Rightarrow f\left(f^{-1}(x+1)\right)=f(3)\Rightarrow x\cancel{+1}=\cancel{1}+\ln\left(\sqrt{3-1}+1\right)\Rightarrow x=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

Δεκτή επειδή αν $t(x)=x+1$ έχουμε $A_t=R$

$A_{f^{-1}(t(x))}=\left\{x\in A_t\ \ \text{και}\ \ t(x)\in A_{f^{-1}}\right\}=\left\{x\in R\ \ \text{και}\ \ x+1\in[1\ ,+\infty)\right\}$

Είναι $x+1\ge 1\Rightarrow x\ge 0$ Οπότε $\{x\in R\ \ \text{και}\ \ x\ge 0\}=[0\ ,\ +\infty)$ και ισχύει $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\ge 0$

Για τον $z=-3-4i$ ισχύει $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Είναι $f\left(x^2+1\right)=1+\ln\left(\sqrt{x^2\cancel{+1}\cancel{-1}}+1\right)=1+\ln\left(|x|+1\right)=1+\ln\left(x+1\right)$

Οπότε $\int_1^2 |z| e^{f\left(x^2+1\right)}dx=\int_1^2 5e^{1+\ln(x+1)}dx=\int_1^2 5e\cdot e^{\ln(x+1)}dx=\int_1^2 5e\cdot\left(x+1\right)dx=5e\int_1^2 (x+1)dx=$

$$=5e\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=5e\left(\frac{2^2}{2}+2-\left(\frac{1^2}{2}+1\right)\right)=5e\left(\frac{4}{2}+2-\frac{1}{2}-1\right)=5e\left(\frac{3}{2}+1\right)=5e\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{2}e$$

ΣΤ) Είναι $g(x)=\ln x+1$ και $A_g=\left(0\ ,\ +\infty\right)$

$$f^{-1}\circ g=\begin{cases}\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=f^{-1}\left(g(x)\right)=\left(e^{\ln x\cancel{+1}\cancel{-1}}-1\right)^2+1=\left(x-1\right)^2+1=x^2-2x+2\\ A_{f^{-1}\circ g}=\left\{x\in A_g\ \text{ και }\ g(x)\in A_{f^{-1}}\right\}=\left\{x>0\ \text{ και }\ \ln x+1\in\left[1\ ,\ +\infty\right]\right\}\end{cases}$$

Είναι $\ln x\cancel{+1}\geq\cancel{1}\Rightarrow\ln x\geq 0\Rightarrow\ln x\geq\ln 1\Rightarrow x\geq 1$

Οπότε $A_{f^{-1}\circ g}=\left\{x>0\ \text{ και }\ x\geq 1\right\}=\left[1\ ,\ +\infty\right)$

Θέτουμε $f(x+1)=f^{-1}\left(g(x)\right)\Rightarrow f(x+1)-f^{-1}\left(g(x)\right)=0$

Έστω $\Phi(x)=f(x+1)-f^{-1}\left(g(x)\right)=f(x+1)-f^{-1}\left(\ln x+1\right)$

Είναι $\Phi(1)=f(2)-f^{-1}(\ln 1+1)=1+\ln\left(\sqrt{2-1}+1\right)-f^{-1}\left(1\right)=\cancel{1}+\ln 2\cancel{-1}=\ln 2>0$

$\left(f^{-1}(1)=\left(e^{1-1}-1\right)^2+1=\left(e^0-1\right)^2+1=1\right)$

Είναι $\Phi(2)=f(3)-f^{-1}(\ln 2+1)=\cancel{1}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(e^{\ln 2+1-1}-1\right)^2\cancel{-1}=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-1<0$

Γιατί $e>\sqrt{2}+1\Rightarrow\ln e>\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\Rightarrow 1>\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\Rightarrow 0>\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-1$

Επειδή η $\Phi(x)$ είναι συνεχής στο (1 , 2) ως πράξεις συνεχών , από το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1\ ,\ 2)$ ώστε το $\Phi\left(x_0\right)=0$

ΘΕΜΑ 4^o

Α) Είναι $f(x)=e^x+x-2$ και έχει πεδίο ορισμού $A_f=R$

$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-2<x_2-2\quad\oplus$

$e^{x_1}+x_1-2<e^{x_2}+x_2-2\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1 – 1 και αντιστρέφεται

Β)

$f(0)=e^0+0-2=1-2=-1<0$

$f(1)=e^1+1-2=e-1>0$

Επειδή η f συνεχής στο (0, 1) ως πράξη συνεχών , από το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\alpha \in (0\ ,\ 1)$ ώστε να ισχύει $f(\alpha)=0 \Rightarrow e^{\alpha}+\alpha-2=0 \Rightarrow e^{\alpha}+\alpha=2$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R άρα και στο (0 , 1) το α είναι μοναδικό

Γ) Το σύνολο τιμών $f(A)=f\big((-\infty\ ,\ +\infty)\big) \overset{f\ \text{γν. αύξουσα}}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}+x-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=0-\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty+\infty=+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών $f(A)=(-\infty\ ,\ +\infty)$

Το σύνολο τιμών περιέχει την τιμή 0 , άρα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f και επειδή είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο R

Δ) $f\left(|z-i|+\dfrac{1}{2}\right)=e-1 \Rightarrow f\left(|z-i|+\dfrac{1}{2}\right)=f(1) \overset{\text{η f είναι 1-1}}{\Rightarrow} |z-i|+\dfrac{1}{2}=1 \Rightarrow |z-i|=1-\dfrac{1}{2} \Rightarrow |z-i|=\dfrac{1}{2}$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο K(0 , 1) και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{2}$

Ε) Είναι $f(x)+f(-x)=e^{x}\cancel{+x}-2+e^{-x}\cancel{-x}-2=e^{x}+e^{-x}-4$

Επίσης είναι $|z_1-z_2|\le 2\rho \Leftrightarrow |z_1-z_2|\le \cancel{2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}} \Leftrightarrow |z_1-z_2|\le 1<\sqrt{2}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(|z_1-z_2|-\sqrt{2}\right)\cdot\big(f(x)+f(-x)\big)\right]=\left(|z_1-z_2|-\sqrt{2}\right)\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)+f(-x)\big)=-\infty$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)+f(-x)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+e^{-x}-4\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}+\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}-4=+\infty+0-4=+\infty$

Και $|z_1-z_2|<\sqrt{2} \Rightarrow |z_1-z_2|-\sqrt{2}<0$