ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 19/4/2012

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 335

Α$_2$. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 241

Α$_3$. $1 \to \Lambda$, $2 \to \Sigma$, $3 \to \Lambda$, $4 \to \Lambda$, $5 \to \Sigma$, $6 \to \Sigma$, $7 \to \Lambda$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $z = 2\left(\sqrt{2} - \dfrac{2}{z}\right) \Rightarrow z = 2\sqrt{2} - \dfrac{4}{z} \overset{\cdot(z\neq 0)}{\Rightarrow} z^2 = 2\sqrt{2}z - 4 \Rightarrow z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

Έχει $\Delta = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 8 - 16 = -8 < 0$

Οπότε $z_{1,2} = \dfrac{2\sqrt{2} \pm i\sqrt{8}}{2\cdot 1} = \dfrac{2\sqrt{2} \pm i2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\cancel{2}\left(\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ \\ z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{array} \right.$

Β2. Είναι $z_1^{\,2} = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^2 = \cancel{2} + 2\cdot\sqrt{2}\cdot i\sqrt{2} \cancel{-2} = 4i$

$z_1^{\,3} = z_1^{\,2}\cdot z_1 = 4i\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) = 4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2} = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

$z_1^{\,4} = z_1^{\,2}\cdot z_1^{\,2} = 4i\cdot 4i = -16$

και $z_2^{\,2} = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^2 = \cancel{2} - 2\cdot\sqrt{2}\cdot i\sqrt{2} \cancel{-2} = -4i$

$z_2^{\,3} = z_2^{\,2}\cdot z_2 = -4i\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right) = -4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2} = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

$z_2^{\,4} = z_2^{\,2}\cdot z_2^{\,2} = (-4i)\cdot(-4i) = -16$

- Αν ο ν είναι πολλαπλάσιο του 4 δηλαδή $\nu = 4\kappa$ τότε :
  $z_1^{\,\nu} + z_2^{\,\nu} = z_1^{\,4\kappa} + z_2^{\,4\kappa} = \left(z_1^{\,4}\right)^\kappa + \left(z_2^{\,4}\right)^\kappa = (-16)^\kappa + (-16)^\kappa \neq 0$

- Αν ο ν έχει μορφή $\nu = 4\kappa + 1$ τότε :
  $z_1^{\,\nu} + z_2^{\,\nu} = z_1^{\,4\kappa+1} + z_2^{\,4\kappa+1} = \left(z_1^{\,4}\right)^\kappa\cdot z_1 + \left(z_2^{\,4}\right)^\kappa\cdot z_2 = (-16)^\kappa\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) + (-16)^\kappa\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right) =$
  $= (-16)^\kappa\left(\sqrt{2} + \cancel{\sqrt{2}i} + \sqrt{2} \cancel{-\sqrt{2}i}\right) = (-16)^\kappa\left(2\sqrt{2}\right) \neq 0$

- Αν ο ν έχει μορφή $\nu = 4\kappa + 2$ τότε :
  $z_1^{\,\nu} + z_2^{\,\nu} = z_1^{\,4\kappa+2} + z_2^{\,4\kappa+2} = \left(z_1^{\,4}\right)^\kappa\cdot z_1^{\,2} + \left(z_2^{\,4}\right)^\kappa\cdot z_2^{\,2} = (-16)^\kappa(4i) + (-16)^\kappa(-4i) =$
  $= (-16)^\kappa(4i - 4i) = (-16)^\kappa\cdot 0 = 0$

- Αν ο ν έχει μορφή $\nu = 4\kappa + 3$ τότε :

$$z_1^{\nu} + z_2^{\nu} = z_1^{4\kappa+3} + z_2^{4\kappa+3} = \left(z_1^{4}\right)^{\kappa} \cdot z_1^{3} + \left(z_2^{4}\right)^{\kappa} \cdot z_2^{3} = (-16)^{\kappa}\left(-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right) + (-16)^{\kappa}\left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i\right) =$$

$$= (-16)^{\kappa}\left(-4\sqrt{2} + \cancel{4\sqrt{2}i} - 4\sqrt{2} \cancel{-4\sqrt{2}i}\right) = (-16)^{\kappa}\left(-8\sqrt{2}\right) \neq 0$$

Άρα πρέπει $\nu = 4\kappa + 2$, $\kappa \in N$

B3. $$\frac{1}{x+yi} + (-i)^{2011} = i^{-16} + \frac{1}{z_1^{2}} + \frac{1}{z_2^{2}} \Rightarrow \frac{1}{x+yi} - i^{2011} = \frac{1}{i^{16}} + \frac{1}{4i} + \frac{1}{-4i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} - i^{4\cdot 502+3} = \frac{1}{\left(i^{4}\right)^{4}} + \cancel{\frac{1}{4i}} - \cancel{\frac{1}{4i}} \Rightarrow \frac{x-yi}{x^2+y^2} - \left(i^{4}\right)^{502} \cdot i^{3} = \frac{1}{1^{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-yi}{x^2+y^2} - (1)^{502}(-i) = 1 \Rightarrow \frac{x-yi}{x^2+y^2} + i = 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i = 1 - i$$

Οπότε πρέπει :

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} = 1 \\ \text{και} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = x^2 + y^2 \\ \text{και} \\ y = x^2 + y^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y \quad \text{Οπότε}$$

$$x = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{ ή } \ x = \frac{1}{2}$$

Άρα $x = y = 0$ (απορρίπτεται γιατί $x + yi \neq 0$) ή $x = y = \dfrac{1}{2}$

B4.

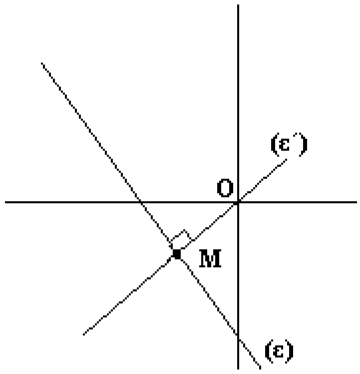
$$\left|z - z_1^{2}\right| = \left|z - z_2^{4}\right| \Rightarrow |z - 4i| = |z + 16| \Rightarrow |z - 4i|^2 = |z + 16|^2 \Rightarrow (z - 4i)(\overline{z} + 4i) = (z + 16)(\overline{z} + 16) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{z\overline{z}} + 4iz - 4i\overline{z} + 16 = \cancel{z\overline{z}} + 16z + 16\overline{z} + 256 \Rightarrow 4i(z - \overline{z}) + 16 = 16(z + \overline{z}) + 256$$

Έστω ότι ο $z = x + yi$ οπότε είναι :

$$4i(2yi) + 16 = 16 \cdot 2x + 256 \Rightarrow -8y + 16 = 32x + 256 \Rightarrow 32x + 8y + 240 = 0 \overset{:(8)}{\Rightarrow} 4x + y + 30 = 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $\varepsilon: 4x + y + 30 = 0$



Θεωρούμε ευθεία (ε΄) που είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων O . Το σημείο τομής (Μ) των δύο ευθειών είναι η εικόνα του μιγαδικού z_0 που έχει το ελάχιστο μέτρο.

Είναι $\lambda_\varepsilon = -\dfrac{4}{1} = -4$ οπότε $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\varepsilon'} = -1 \Rightarrow -4 \cdot \lambda_{\varepsilon'} = -1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon'} = \dfrac{1}{4}$

Άρα η $\varepsilon' : y = \dfrac{1}{4}x$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + y + 30 = 0 \\ y = \dfrac{1}{4}x \end{array}\right\} \Rightarrow 4x + \frac{1}{4}x + 30 = 0 \overset{\cdot(4)}{\Rightarrow} 16x + x + 120 = 0 \Rightarrow 17x = -120 \Rightarrow x = -\frac{120}{17}$$

Οπότε $y = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{120}{17}\right) \Rightarrow y = -\dfrac{30}{17}$

Άρα είναι $z_0 = -\dfrac{120}{17} - \dfrac{30}{17}i$

Β5. Είναι $|z + 7 - i| = |z - (-7 + i)|$

Θεωρούμε το σημείο $K(-7\ ,\ 1)$ και το ελάχιστο του μέτρου $|z + 7 - i|$ είναι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε)

$$|z + 7 - i|_{\min} = d(K\ ,\varepsilon) = \frac{|4\cdot(-7) + 1\cdot 1 + 30|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{|-28 + 1 + 30|}{\sqrt{16 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $z = x + yi \quad , \quad x, y \in R$ έχουμε:

$$|z - 2 + i| = |z + 2 - i| \Leftrightarrow |x + yi - 2 + i| = |x + yi + 2 - i| \Leftrightarrow$$

$$|(x - 2) + (y + 1)i| = |(x + 2) + (y - 1)i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4y = 8x \Leftrightarrow y = 2x\ .$$

Συνεπώς οι εικόνες του μιγαδικού, ανήκουν στην ευθεία $(\varepsilon)\, y = 2x$.

Γ2. Επειδή η ευθεία $(\varepsilon)\, y = 2x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - 2x\right) = 0$$

Αρχικά $\left|\frac{5\eta\mu u}{u^2}\right| \le \frac{1}{u^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{u^2} \le \frac{5\eta\mu u}{u^2} \le \frac{1}{u^2}$ και $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u^2}\right) = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{u^2}\right) = 0$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{5\eta\mu u}{u^2}\right) = 0$

$$10 = \lim_{x\to 0^+}\frac{xf\left(\frac{1}{x}\right) - 5x^2\eta\mu\frac{1}{x} + \kappa}{f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} + 2} \overset{(*)}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{\frac{f(u)}{u} - \frac{5\eta\mu u}{u^2} + \kappa}{f(u) - 2u + 2} = \frac{2 - 0 + \kappa}{0 + 2} = \frac{\kappa + 2}{2}$$

Οπότε $\frac{\kappa+2}{2} = 10 \Leftrightarrow \kappa = 18$

$(*)$ Θέτω $\frac{1}{x} = u$, έχω ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$

Γ3. Έχουμε $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, οπότε για $x = 0$ έχουμε

$$g(0) = \int_0^1 f(0)dt = f(0)\int_0^1 dt = f(0)[t]_0^1 = f(0).$$

Για $x \ne 0$ θέτουμε $xt = u$, οπότε $dt = \frac{du}{x}$.

Για $t = 0$, έχουμε $u = 0$. Ενώ για $t = 1$, έχουμε $u = x$.

Συνεπώς για $x \ne 0$ έχουμε $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt = \int_0^x \frac{f(u)du}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$.

Επομένως, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du & ,x \ne 0 \\ f(0) & ,x = 0 \end{cases}$

Γ4. Έχουμε ότι η $f(u)$ είναι συνεχής στο R, οπότε η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο R. Η $\frac{1}{x}$ παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, άρα η g παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Επίσης

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du - xf(0)}{x^2} \underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2x} = \frac{f'(0)}{2}.$$

Επομένως η g παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(u)\,du+\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0 \\ \dfrac{f'(0)}{2}, & x=0 \end{cases}$

Γ5. Έχουμε $z=\int_1^2 f(t)dt+i\int_0^2 f(t)dt \Leftrightarrow \alpha+2\alpha i=\int_1^2 f(t)dt+i\int_0^2 f(t)dt$

Οπότε $\displaystyle\int_1^2 f(t)dt=\alpha$ και $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=2\alpha$

Όμως $\displaystyle\int_1^2 f(t)dt=\alpha \Leftrightarrow \int_1^0 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt=\alpha \Leftrightarrow \int_1^0 f(t)dt+2\alpha=\alpha \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt=\alpha$

Η g συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$. Συνεπώς από ΘΜΤ έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(2)-g(1)}{2-1}=g(2)-g(1)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt=\alpha-\alpha=0$$

Δηλαδή $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\xi^2}\displaystyle\int_0^\xi f(u)du+\dfrac{f(\xi)}{\xi}=0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\xi}\displaystyle\int_0^\xi f(u)du+f(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{\xi}\displaystyle\int_0^\xi f(u)du=f(\xi) \Leftrightarrow g(\xi)=f(\xi)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\alpha(x)=\displaystyle\int_x^0 f(t)dt+\int_0^{x^3} f(t)dt=\int_0^{x^3} f(t)dt-\int_0^x f(t)dt$.

Επειδή η f συνεχής στο R, η $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε και η $\displaystyle\int_0^{x^3} f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση παραγωγίσιμων. Επομένως και η $\alpha(x)$ παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων με $\alpha'(x)=3x^2f(x^3)-f(x)$.

Δ2. Για $u=tx$ έχουμε $du=xdt$. Όταν $t=1\to u=x,\ t=x^2\to u=x^3$

Για $x\neq 0$, το $\displaystyle\int_1^{x^2}\frac{f(tx)}{x|x|}dt=\int_1^{x^2}\frac{f(tx)}{x^2|x|}xdt=\int_x^{x^3}\frac{f(u)}{x^2|x|}du=\frac{1}{x^2|x|}\int_x^{x^3}f(u)du=\frac{1}{x^2|x|}\alpha(x)$.

Επομένως σύμφωνα με την υπόθεση ισχύουν τα εξής:

Για $x>0,\ \dfrac{1}{x^3}\alpha(x)-x^2+1\geq 0 \Leftrightarrow \alpha(x)-x^5+x^3\geq 0$ **(1)**

Ενώ για $x<0, -\frac{1}{x^3}\alpha(x)-x^2+1\geq 0 \Leftrightarrow -\alpha(x)-x^5+x^3\leq 0 \Leftrightarrow \alpha(x)+x^5-x^3\geq 0$ **(2)**

Αν τώρα $\beta(x)=\alpha(x)-x^5+x^3$ ισχύει λόγω του **(1)** ότι $\beta(x)\geq 0$, επειδή η β είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\beta'(x)=\alpha'(x)-5x^4+3x^2$.

Και $\beta(1)=\alpha(1)=0$, στο $x_1=1$ η συνάρτηση β παρουσιάζει ακρότατο.

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, θα είναι $\beta'(1)=\alpha'(1)-5+3=0 \Leftrightarrow \alpha'(1)=2$ δηλαδή $3f(1)-f(1)=2 \Leftrightarrow f(1)=1$.

Ομοίως, για την $\gamma(x)=\alpha(x)+x^5-x^3$ ισχύει ότι $\gamma(x)\geq 0$, $x\in(-\infty,0)$.

Η γ παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $\gamma'(x)=\alpha'(x)+5x^4-3x^2$. Επίσης, $\gamma(-1)=\alpha(-1)=0$, άρα ισχύει $\gamma(x)\geq\gamma(-1), x\in(-\infty,0)$. Οπότε η συνάρτηση γ παρουσιάζει ακρότατο στο $x_2=-1$. Από το θεώρημα Fermat, θα ισχύει ότι $\gamma'(-1)=\alpha'(-1)+5-3=0 \Leftrightarrow \alpha'(-1)=-2$, οπότε $3f(-1)-f(-1)=-2 \Leftrightarrow f(-1)=-1$.

Δ3. Είναι $\alpha'(0)=-f(0)$. Τώρα , για $x>0$ ισχύει ότι

$\alpha(x)-x^5+x^3\geq 0 \Leftrightarrow \alpha(x)\geq x^5-x^3 \Leftrightarrow \alpha(x)-\alpha(0)\geq x^5-x^3$

και τελικά $\dfrac{\alpha(x)-\alpha(0)}{x}\geq x^4-x^2$ θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha(x)-\alpha(0)}{x}\geq 0$ άρα $\alpha'(0)\geq 0$.

Για $x>0$ ισχύει ότι, $\alpha(x)+x^5-x^3\geq 0 \Leftrightarrow \alpha(x)\geq -x^5+x^3 \Leftrightarrow \alpha(x)-\alpha(0)\geq -x^5+x^3$.

Τελικά, $\dfrac{\alpha(x)-\alpha(0)}{x}\leq -x^4+x^2$. Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha(x)-\alpha(0)}{x}\leq 0$, άρα $\alpha'(0)\leq 0$. Τελικά $\alpha'(0)=0$, επομένως $f(0)=0$.

Δ4. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$, οπότε σύμφωνα με ΘΜΤ, θα υπάρχουν $x_1\in(-1,0), x_2\in(0,1)$ ώστε

$f'(x_1)=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=1$ και $f'(x_2)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) και $f'(x_1)=f'(x_2)=1$. Οπότε σύμφωνα με το Rolle, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$. Άρα η f έχει ένα πιθανό σημείο καμπής.