ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 5 / 1 / 2012

ΘΕΜΑ 1^o

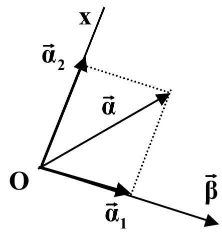
Α.
1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 37
2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 61

Β. $1 \to \Lambda$, $2 \to \Sigma$, $3 \to \Lambda$, $4 \to \Lambda$, $5 \to \Lambda$, $6 \to \Lambda$, $7 \to \Lambda$, $8 \to \Sigma$, $9 \to \Lambda$, $10 \to \Sigma$

Γ. $1 \to \mathrm{B}$, $2 \to \Delta$, $3 \to \mathrm{A}$, $4 \to \mathrm{A}$, $5 \to \mathrm{A}$

ΘΕΜΑ 2^o

Α.
α. Έστω ότι $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$



Είναι $\vec{\alpha}_1 = \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$ και

$$\vec{\alpha}_1 // \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}_1 = \lambda \cdot \vec{\beta} \Rightarrow \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta} \overset{\cdot\vec{\beta}}{\Rightarrow} \vec{\beta} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}^2 \Rightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \left|\vec{\beta}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 7 + 1(-1) = \lambda \cdot \left(3^2 + (-1)^2\right) \Rightarrow 20 = 10\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{20}{10} \Rightarrow \lambda = 2$$

Άρα $\vec{\alpha}_1 = 2 \cdot \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}_1 = 2 \cdot (3,-1) \Rightarrow \vec{\alpha}_1 = (6,-2)$

Οπότε αφού $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 \Rightarrow \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 \Rightarrow \vec{\alpha}_2 = (7,1) - (6,-2) \Rightarrow \vec{\alpha}_2 = (1,3)$

β. Για να είναι τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ γραμμικός συνδυασμός του $\vec{\gamma}$ πρέπει :

$$\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} \Rightarrow (-3,1) = \kappa \cdot (7,1) + \lambda \cdot (3,-1) \Rightarrow (-3,1) = (7\kappa, \kappa) + (3\lambda, -\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-3,1) = (7\kappa + 3\lambda, \kappa - \lambda) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} -3 = 7\kappa + 3\lambda \\ 1 = \kappa - \lambda \end{matrix}\right\} \underset{\cdot 3}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} \cancel{-3} = 7\kappa \cancel{+3\lambda} \\ \cancel{3} = 3\kappa \cancel{-3\lambda} \end{matrix}\right. \oplus$$

$$0 = 10\kappa \Rightarrow \kappa = 0$$

Οπότε για $\kappa = 0$ είναι $1 = 0 - \lambda \Rightarrow \lambda = -1$
Άρα είναι $\vec{\gamma} = -\vec{\beta}$

γ. Είναι $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \Rightarrow \vec{u} = (7,1) - (3,-1) = (4,2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{\gamma} = (4,2) \cdot (-3,1) = 4(-3) + 2 \cdot 1 = -12 + 2 = -10$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{10}$$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Οπότε: $συν\left(\widehat{\vec{u},\vec{\gamma}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{u}||\vec{\gamma}|}=\frac{-10}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{\cancel{10}}{\sqrt{2}\cdot\cancel{10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα $\widehat{\vec{u},\vec{\gamma}}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Β. $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Delta}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$

α. Είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=3\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-2\vec{\beta}^2=3|\vec{\alpha}|^2+5\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-2|\vec{\beta}|^2=$

$=3\cdot1^2+5\cdot|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|συν\frac{\pi}{3}-2\cdot2^2=3+5\cdot1\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}-2\cdot4=3+5-8=0$

Αφού $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Delta}$ και επειδή το ΑΒΓΔ παραλ/μο , άρα το ΑΒΓΔ ορθογώνιο.

β. Αφού το ΑΒΓΔ ορθογώνιο οι διαγώνιοι είναι ίσες μεταξύ τους .

$\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}\Rightarrow\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\Rightarrow\overrightarrow{A\Gamma}=4\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left|4\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left(4\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=16\vec{\alpha}^2+8\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=16|\vec{\alpha}|^2+8\cdot|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|συν\frac{\pi}{3}+|\vec{\beta}|^2=$

$=16\cdot1^2+8\cdot1\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}+2^2=16+8+4=28$

Άρα $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\sqrt{28}=\sqrt{4\cdot7}=2\sqrt{7}$

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Α.

α. Αφού η ευθεία ε_1 τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ δεν έχει μορφή $x=x_0$ ή $y=y_0$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Διέρχεται από το $P(-1,3)$, άρα

$\varepsilon_1: y-3=\lambda\cdot\left(x-(-1)\right)\Rightarrow y-3=\lambda x+\lambda\Rightarrow y=\lambda x+\lambda+3$

β.

i) Τέμνει τον $x'x$ στο Α. Οπότε για $y=0$

$0=\lambda x+\lambda+3\Rightarrow\lambda x=-\lambda-3\Rightarrow x=\frac{-\lambda-3}{\lambda}$, με $\lambda\neq0$

Άρα $A\left(\frac{-\lambda-3}{\lambda},0\right)$.

Τέμνει τον $y'y$ στο Β οπότε για $x=0$

$y=\cancel{\lambda\cdot0}+\lambda+3\Rightarrow y=\lambda+3$

Άρα $B(0,\lambda+3)$

Το P είναι μέσο του AB οπότε

$$x_\rho=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow -1=\frac{\frac{-\lambda-3}{\lambda}+0}{2}\Rightarrow -1=\frac{\frac{-\lambda-3}{\lambda}}{2}\Rightarrow -1=\frac{-\lambda-3}{2\lambda}\Rightarrow -2\lambda=-\lambda-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\lambda+\lambda=-3\Rightarrow -\lambda=-3\Rightarrow \lambda=3$$

Άρα $\varepsilon_1: y=3x+3+3\Rightarrow y=3x+6\Rightarrow 3x-y+6=0$

ii) Αφού το $\Delta(2\alpha-7,5-4\alpha)$ ανήκει στην ε_1 ισχύει

$$3(2\alpha-7)-(5-4\alpha)+6=0\Rightarrow 6\alpha-21-5+4\alpha+6=0\Rightarrow 10\alpha-20=0\Rightarrow 10\alpha=20\Rightarrow \alpha=2$$

Άρα $\Delta(-3,-3)$

$$\lambda_{\Gamma\Delta}=\frac{y_\Delta-y_\Gamma}{x_\Delta-x_\Gamma}=\frac{-3-1}{-3-(-5)}=\frac{-4}{2}=-2$$

Είναι $\varepsilon_2\perp\Gamma\Delta\Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2}\cdot\lambda_{\Gamma\Delta}=-1\Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2}\cdot(-2)=-1\Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2}=\frac{-1}{-2}\Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2}=\frac{1}{2}$

Το μέσο M του $\Gamma\Delta$ είναι:

$$x_M=\frac{-5-3}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \quad \text{και} \quad y_M=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Επειδή η ε_2 μεσοκάθετη του $\Gamma\Delta$ άρα διέρχεται από το M

$$\varepsilon_2: y-(-1)=\frac{1}{2}(x-(-4))\Rightarrow y+1=\frac{1}{2}x+2\overset{\cdot 2}{\Rightarrow}2y+2=x+4\Rightarrow x-2y+2=0$$

iii) Ένα διάνυσμα $\vec{\delta_1}\,//\,\varepsilon_1$ είναι το $\vec{\delta_1}=(-1,-3)$ και ένα διάνυσμα $\vec{\delta_2}\,//\,\varepsilon_2$ είναι το $\vec{\delta_2}=(-2,-1)$.

Είναι $\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}=(-1)(-2)+(-3)(-1)=2+3=5$

$$\left|\vec{\delta_1}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

$$\left|\vec{\delta_2}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

Οπότε η γωνία $\left(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\right)=\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)$

$$\text{Είναι συν}\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{\left|\vec{\delta_1}\right|\left|\vec{\delta_2}\right|}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{2}\cdot 5}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=\frac{\pi}{4}$

Β. $\varepsilon_1: 2x+y=4$ και $\varepsilon_2: 4x+2y-2=0$

α. Για $x=0$ στην ε_1 έχουμε $y=4$.

Άρα το σημείο $A(0,4)$ σημείο της ε_1.

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(A,\varepsilon_2)=\frac{|4\cdot 0+2\cdot 4-2|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{|8-2|}{\sqrt{16+4}}=\frac{6}{\sqrt{20}}$$

β. Για $x=0$ στην ε_2 έχουμε $2y-2=0 \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1$

Άρα το σημείο $B(0,1)$ σημείο της ε_2.

Το μέσο M του AB είναι $x_M=\frac{0+0}{2} \Rightarrow x_M=0$ και $y_M=\frac{4+1}{2} \Rightarrow y_M=\frac{5}{2}$.

Η μεσοπαράλληλη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{-2}{1}=-2$

και διέρχεται από το $M\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

Άρα $\varepsilon: y-\frac{5}{2}=-2(x-0) \Rightarrow y-\frac{5}{2}=-2x \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 2y-5=-4x \Rightarrow 4x+2y-5=0$

<u>ΘΕΜΑ 4^Ο^</u>

Α.

α. Το διάνυσμα $\vec{v}=(-2,4)$ έχει $\lambda\vec{v}=\frac{4}{-2}=-2$.

Η ευθεία $\varepsilon_1 \perp \vec{v} \Rightarrow \lambda\varepsilon_1 \cdot \lambda\vec{v}=-1 \Rightarrow \lambda\varepsilon_1 \cdot(-2)=-1 \Rightarrow \lambda\varepsilon_1=\frac{1}{2}$

Η ε_1 διέρχεται από το $A(10,5)$, άρα

$\varepsilon_1: y-5=\frac{1}{2}(x-10) \Rightarrow y\cancel{-5}=\frac{1}{2}x\cancel{-5} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x \Rightarrow 2y=x \Rightarrow x-2y=0$

Είναι $\lambda_{B\Gamma}=\frac{2-(-1)}{-6-3}=\frac{3}{-9}=-\frac{1}{3}$

Άρα $\varepsilon_2: y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-3) \Rightarrow y\cancel{+1}=-\frac{1}{3}x\cancel{+1} \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x \Rightarrow 3y=-x \Rightarrow x+3y=0$

Β.

i) Είναι $\lambda_{\zeta_1}=\frac{-(\lambda-3)}{\lambda-4}$ και $\lambda_{\zeta_2}=\frac{-\lambda}{\lambda-2}$

Αφού $\zeta_1 // \zeta_2 \Rightarrow \lambda_{\zeta_1}=\lambda_{\zeta_2} \Rightarrow \frac{-(\lambda-3)}{\lambda-4}=\frac{-\lambda}{\lambda-2} \Rightarrow \frac{\lambda-3}{\lambda-4}=\frac{\lambda}{\lambda-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda-3)(\lambda-2)=\lambda\cdot(\lambda-4) \Rightarrow \cancel{\lambda^2}-2\lambda-3\lambda+6=\cancel{\lambda^2}-4\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow -5\lambda+6=-4\lambda \Rightarrow -5\lambda+4\lambda=-6 \Rightarrow -\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=6$

Άρα $\zeta_1: 3x+2y-28=0$ και $\zeta_2: 6x+4y-12=0$

ii) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ διέρχονται από την αρχή των αξόνων

άρα το σημείο τομής τους είναι το $O(0,0)$.

Οι ευθείες ε_1, ζ_1 έχουν σημείο τομής το Κ.

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1 : x-2y=0\\ \zeta_1 : 3x+2y-28=0\end{array}\right| \overset{\cdot(-3)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\cancel{-3x}+6y=0\\ \cancel{3x}+2y-28=0 \oplus\end{array}\right.$$

$$8y-28=0 \Rightarrow 8y=28 \Rightarrow y=\frac{28}{8} \Rightarrow y=\frac{7}{2}$$

Για $y=\frac{7}{2}$ είναι $x\cancel{-2}\cdot\frac{7}{\cancel{2}}=0 \Rightarrow x=7$. Άρα $K\left(7,\frac{7}{2}\right)$

Οι ευθείες ε_2,ζ_1 έχουν σημείο τομής το Λ.

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_2 : x+3y=0\\ \zeta_1 : 3x+2y-28=0\end{array}\right| \overset{\cdot(-3)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\cancel{-3x}-9y=0\\ \cancel{3x}+2y-28=0 \oplus\end{array}\right.$$

$$-7y-28=0 \Rightarrow -7y=28 \Rightarrow y=\frac{28}{-7} \Rightarrow y=-4$$

Για $y=-4$ είναι $x+3(-4)=0 \Rightarrow x-12=0 \Rightarrow x=12$. Άρα το $\Lambda(12,-4)$

Το διάνυσμα $\overrightarrow{OK}=\left(7-0,\frac{7}{2}-0\right)=\left(7,\frac{7}{2}\right)$

Το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Lambda}=(12-0,-4-0)=(12,-4)$

Είναι $\det\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{O\Lambda}\right)=\begin{vmatrix}7 & \frac{7}{2}\\ 12 & -4\end{vmatrix}=7\cdot(-4)-12\cdot\frac{7}{2}=-28-42=-70$

Άρα $(OK\Lambda)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{O\Lambda}\right)\right|=\frac{1}{2}|-70|=\frac{70}{2}=35$ τ.μ.

iii) Έστω $M(x,y)$

Είναι $d(M,\varepsilon_1)=\sqrt{2}d(M,\varepsilon_2) \Rightarrow \frac{|1\cdot x-2\cdot y|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{2}\frac{|1\cdot x+3\cdot y|}{\sqrt{1^2+3^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|x-2y|}{\sqrt{1+4}}=\frac{\sqrt{2}|x+3y|}{\sqrt{1+9}} \Rightarrow \frac{|x-2y|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}|x+3y|}{\sqrt{10}} \Rightarrow |x-2y|=\frac{\cancel{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}\,|x+3y|}{\cancel{\sqrt{10}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x-2y|=|x+3y| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\cancel{x}-2y=\cancel{x}+3y\\ ή\\ x-2y=-x-3y\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-5y=0\\ ή\\ 2x=-y\end{array}\right\} \Rightarrow y=0 \text{ ή } x=\frac{-y}{2}$$

Επειδή τα σημεία Μ ανήκουν στην $\zeta_2 : 6x+4y-12=0$ έχουμε:

Για $y=0$ είναι $6x-12=0 \Rightarrow 6x=12 \Rightarrow x=2$. Άρα $M_1(2,0)$.

Για $x = \frac{-y}{2}$ είναι $6\left(\frac{-y}{2}\right) + 4y - 12 = 0 \Rightarrow -3y + 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = 12$.

Οπότε $x = -\frac{12}{2} \Rightarrow x = -6$. Άρα $M_2(-6, 12)$

Β.

α. Για να είναι ευθεία για κάθε $\alpha \in R$ πρέπει $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

Είναι $2\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7 < 0$

Άρα $2\alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0$ για κάθε $\alpha \in R$ οπότε η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in R$.

β. Για $\alpha = 0$ είναι $\varepsilon_1 : x + y = 0$

Για $\alpha = 1$ είναι $\varepsilon_2 : 4x + y - 3 = 0$

Το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι το Α.

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 : x + y = 0 \\ \varepsilon_2 : 4x + y - 3 = 0 \end{array}\right\} \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} -x \cancel{-y} = 0 \\ 4x \cancel{+y} - 3 = 0 \quad \oplus \end{array}\right.$$

$$3x - 3 = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

Για $x = 1$, $1 + y = 0 \Rightarrow y = -1$

Άρα το $A(1, -1)$

Για $x = 1$ και $y = -1$ στην (1) έχουμε

$(2\alpha^2 + \alpha + 1) \cdot 1 + (\alpha^2 - \alpha + 1) \cdot (-1) - \alpha^2 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + \alpha \cancel{+1} - \alpha^2 + \alpha \cancel{-1} - \alpha^2 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει.

Άρα όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το $A(1, -1)$.

γ. Η $y = \frac{1}{2}x + 3$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Η κάθετη σ' αυτήν πρέπει να έχει $\lambda \cdot \lambda_1 = -1 \Rightarrow \lambda \cdot \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow \lambda = -2$

Πρέπει $\frac{-(2\alpha^2 + \alpha + 1)}{\alpha^2 - \alpha + 1} = -2 \Rightarrow -(2\alpha^2 + \alpha + 1) = -2(\alpha^2 - \alpha + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{-2\alpha^2} - \alpha - 1 = \cancel{-2\alpha^2} + 2\alpha - 2 \Rightarrow -3\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$