ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 19-04-12

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ.

Β. $1 \to Λ$, $2 \to Λ$, $3 \to Σ$, $4 \to Λ$, $5 \to Λ$, $6 \to Λ$, $7 \to Σ$, $8 \to Σ$, $9 \to Σ$, $10 \to Λ$

Γ. $1 \to Γ$, $2 \to Δ$, $3 \to Α$, $4 \to Β$, $5 \to Α$

ΘΕΜΑ 2ο

Είναι $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$ και $(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = 3$

α. $(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = 3 \Rightarrow 3\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 3 \Rightarrow 3|\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cdot 4^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 5^2 = 3 \Rightarrow 48 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 25 = 3 \Rightarrow 23 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 3 \Rightarrow 20 = 2\vec{\alpha}\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 10$

β. $συν\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} \Rightarrow συν\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{10}{4\cdot 5} \Rightarrow συν\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{2}{4} \Rightarrow συν\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{1}{2}$

Οπότε η γωνία είναι $\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = \dfrac{\pi}{3}$

γ.

i) $|\vec{\gamma}|^2 = |2\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 - 4\cdot 10 + |\vec{\beta}|^2 = 4\cdot 4^2 - 40 + 5^2 = 64 - 40 + 25 = 49$

Άρα $|\vec{\gamma}| = \sqrt{49} = 7$

ii) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$ είναι

$\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta} = (2\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+5\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 + 10\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\alpha}\vec{\beta} - 5\vec{\beta}^2 = 2\cdot 4^2 + 9\vec{\alpha}\vec{\beta} - 5\cdot 5^2 = 32 + 90 - 125 = -3$

Για να είναι τα $\vec{v}$, $\vec{u}$ κάθετα πρέπει $\vec{v}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow \left(\kappa\vec{\alpha} + (\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta})\vec{\beta}\right)(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) = 0 \overset{\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}=-3}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (\kappa\vec{\alpha}-3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) = 0 \Rightarrow \kappa\vec{\alpha}^2 - 2\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}\vec{\beta} + 6\vec{\beta}^2 = 0 \Rightarrow \kappa\cdot 4^2 - 2\kappa\cdot 10 - 3\cdot 10 + 6\cdot 5^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16\kappa - 20\kappa - 30 + 150 = 0 \Rightarrow -4\kappa + 120 = 0 \Rightarrow -4\kappa = -120 \Rightarrow \kappa = \dfrac{-120}{-4} \Rightarrow \kappa = 30$

ΘΕΜΑ 3ο

Είναι $\varepsilon_1 : 2x + \alpha y - 3 = 0$, $\varepsilon_2 : \beta x + 4y + \gamma = 0$ και τέμνονται κάθετα στο $A(2,1)$

α) Αφού οι ευθείες τέμνονται στο $A(2,1)$ άρα τις επαλληθεύει.

Για $x=2$, $y=1$ στην $\varepsilon_1: 2\cdot 2+\alpha\cdot 1-3=0 \Rightarrow 4+\alpha-3=0 \Rightarrow 1+\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-1$

Για $x=2$, $y=1$ στην $\varepsilon_2: \beta\cdot 2+4\cdot 1+\gamma=0 \Rightarrow 2\beta+4+\gamma=0$ **(1)**

Επειδή τέμνονται κάθετα ισχύει

$$\lambda\varepsilon_1\cdot\lambda\varepsilon_2=-1 \Rightarrow \frac{-2}{-1}\cdot\left(\frac{-\beta}{4}\right)=-1 \Rightarrow \frac{-2\beta}{4}=-1 \Rightarrow -2\beta=-4 \Rightarrow \beta=\frac{-4}{-2} \Rightarrow \beta=2$$

Οπότε από **(1)** $\Rightarrow 2\cdot 2+4+\gamma=0 \Rightarrow 4+4+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-8$

Άρα $\varepsilon_1: 2x-y-3=0$ και $\varepsilon_2: 2x+4y-8=0$

β) i) Είναι $\lambda\varepsilon_3=\frac{-13-8}{10-3}=\frac{-21}{7}=-3$

$$\varepsilon_3: y-y_B=\lambda\varepsilon_3\cdot(x-x_B) \Rightarrow y-8=-3(x-3) \Rightarrow y=-3x+9+8 \Rightarrow y=-3x+17 \Rightarrow 3x+y-17=0$$

ii) Έστω διάνυσμα $\vec{\delta_1}$ παράλληλο στην ε_1, άρα $\vec{\delta_1}=(-1,-2)$.

Έστω διάνυσμα $\vec{\delta_3}$ παράλληλο στην ε_3, άρα $\vec{\delta_3}=(1,-3)$.

Η γωνία $\vec{\delta_1},\vec{\delta_3}$ είναι

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_3}\right)=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_3}}{|\vec{\delta_1}||\vec{\delta_3}|}=\frac{-1\cdot 1+(-2)\cdot(-3)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{-1+6}{\sqrt{1+4}\sqrt{1+9}}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{5\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Είναι $\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_3}\right)=\frac{\pi}{4}$. Άρα και $\left(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_3}\right)=\frac{\pi}{4}$

iii) Έστω $M(x_0,y_0)$ σημείο της ε_3, πρέπει $d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2) \Rightarrow \frac{|2x_0-y_0-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2x_0+4y_0-8|}{\sqrt{2^2+4^2}}$

Επειδή το $M(x_0,y_0)$ ανήκει στην $\varepsilon_3: y-3x+17$ ισχύει ότι $y_0=-3x_0+17$

Οπότε

$$\frac{|2x_0-(-3x_0+17)-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|2x_0+4(-3x_0+17)-8|}{\sqrt{4+16}} \Rightarrow \frac{|2x_0+3x_0-17-3|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x_0-12x_0+68-8|}{\sqrt{20}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|5x_0-20|}{\sqrt{5}}=\frac{|-10x_0+60|}{2\sqrt{5}} \overset{\cdot 2\sqrt{5}}{\Rightarrow} 2|5x_0-20|=|-10x_0+60| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(5x_0-20)=-10x_0+60 \Rightarrow 10x_0-40=-10x_0+60 \Rightarrow 20x_0=100 \Rightarrow x_0=5 \quad \textbf{ή}$$

$$\Rightarrow 2(5x_0-20)=10x_0-60 \Rightarrow \cancel{10x_0}-40=\cancel{10x_0}-60 \Rightarrow -40=-60 \text{ άτοπο.}$$

Άρα $x_0=5$ οπότε $y_0=-3\cdot5+17=-15+17=2$. Δηλαδή $M(5,2)$

iv)

- Αν η ευθεία <u>δεν</u> έχει συντελεστή διεύθυνσης τότε έχει μορφή $\varepsilon: x=x_0$. Αφού διέρχεται από το $M(5,2)$ είναι η $x=5\Rightarrow x-5=0$

$d(\Gamma,\varepsilon)=5\Rightarrow\frac{|1\cdot10+0\cdot(-13)-5|}{\sqrt{1^2+0^2}}=5\Rightarrow\frac{|10-5|}{\sqrt{1}}=5\Rightarrow5=5$. Οπότε η ευθεία x = 5 είναι μια λύση

- Αν η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης λ τότε έχει μορφή
$\varepsilon: y-y_M=\lambda(x-x_M)\Rightarrow y-2=\lambda(x-5)\Rightarrow y-2=\lambda x-5\lambda\Rightarrow\lambda x-y-5\lambda+2=0$

$$d(\Gamma,\varepsilon)=5\Rightarrow\frac{|\lambda\cdot10+(-1)\cdot(-13)-5\lambda+2|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=5\Rightarrow\frac{|10\lambda+13-5\lambda+2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{|5\lambda+15|}{\lambda^2+1}=5\Rightarrow|5\lambda+15|=5\sqrt{\lambda^2+1}\Rightarrow5|\lambda+3|=5\sqrt{\lambda^2+1}\overset{:5}{\Rightarrow}|\lambda+3|=\sqrt{\lambda^2+1}\Rightarrow|\lambda+3|^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cancel{\lambda^2}+6\lambda+9=\cancel{\lambda^2}+1\Rightarrow6\lambda=-8\Rightarrow\lambda=\frac{-8}{6}\Rightarrow\lambda=\frac{-4}{3}$$

Άρα η ευθεία

$$\varepsilon:\frac{-4}{3}x-y-5\left(\frac{-4}{3}\right)+2=0\Rightarrow\frac{-4}{3}x-y+\frac{20}{3}+2=0\overset{\cdot3}{\Rightarrow}-4x-3y+20+6=0\Rightarrow-4x-3y+26=0$$

ΘΕΜΑ 4^{o}

$$x^2+y^2-4|\vec{\alpha}|x+6|\vec{\beta}|y+12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$$

α) Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=\left(-4|\vec{\alpha}|\right)^2+\left(6|\vec{\beta}|\right)^2-4\cdot12\vec{\alpha}\vec{\beta}=16|\vec{\alpha}|^2+36|\vec{\beta}|^2-48\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$

$$=4\left(4|\vec{\alpha}|^2-12\vec{\alpha}\vec{\beta}+9|\vec{\beta}|^2\right)=4\left(4\vec{\alpha}^2-12\vec{\alpha}\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2\right)=4\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2>0$$

Άρα είναι κύκλος με κέντρο $K\left(2|\vec{\alpha}|,-3|\vec{\beta}|\right)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{4\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2}}{2}=\frac{\cancel{2}\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|}{\cancel{2}}=\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|$$

β)

i) Το κέντρο $K\left(2|\vec{\alpha}|,-3|\vec{\beta}|\right)$ ανήκει στην $\zeta: 2x+3y+2=0$

Άρα $2\cdot2|\vec{\alpha}|+3\cdot\left(-3|\vec{\beta}|\right)+2=0\Rightarrow4|\vec{\alpha}|-9|\vec{\beta}|+2=0$ **(1)**

Το διάνυσμα $\overrightarrow{K\Lambda}$ είναι κάθετο στην εφαπτομένη (ε).

Είναι $\overrightarrow{K\Lambda}=\left(|\vec{\alpha}|-2|\vec{\alpha}|\,,\,-6|\vec{\beta}|-\left(-3|\vec{\beta}|\right)\right)=\left(-|\vec{\alpha}|\,,\,-3|\vec{\beta}|\right)$

Είναι $\lambda_{\overline{K\Lambda}} = \dfrac{-3|\vec{\beta}|}{-|\vec{\alpha}|} = \dfrac{3|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}$. Η εφαπτομένη (ε) έχει $\lambda_\varepsilon = \dfrac{-2}{3}$

Οπότε $\left(\dfrac{-2}{\cancel{3}}\right)\cdot\dfrac{\cancel{3}|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} = -1 \Rightarrow \dfrac{2|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} = 1 \Rightarrow 2|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** $\Rightarrow 4\cdot 2|\vec{\beta}| - 9|\vec{\beta}| + 2 = 0 \Rightarrow -|\vec{\beta}| + 2 = 0 \Rightarrow |\vec{\beta}| = 2$

Οπότε $|\vec{\alpha}| = 2\cdot 2 \Rightarrow |\vec{\alpha}| = 4$

Επίσης το σημείο $\Lambda\left(|\vec{\alpha}|, -6|\vec{\beta}|\right)$ ανήκει στον κύκλο (c).

Άρα $|\vec{\alpha}|^2 + \left(-6|\vec{\beta}|\right)^2 - 4|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}| + 6|\vec{\beta}|\cdot\left(-6|\vec{\beta}|\right) + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 \cancel{+36|\vec{\beta}|^2} - 4|\vec{\alpha}|^2 \cancel{-36|\vec{\beta}|^2} + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3|\vec{\alpha}|^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Rightarrow -3\cdot 4^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -48 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Rightarrow 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 48 \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 4$

Οπότε $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \dfrac{\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$. Άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

iii) Είναι $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)\left(2\vec{\alpha} - 11\vec{\beta}\right) = 6\vec{\alpha}^2 - 33\vec{\alpha}\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 11\vec{\beta}^2 = 6|\vec{\alpha}|^2 - 35\vec{\alpha}\vec{\beta} + 11|\vec{\beta}|^2 =$

$= 6\cdot 4^2 - 35\cdot 4 + 11\cdot 2^2 = 96 - 140 + 44 = 140 - 140 = 0$

Άρα τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα

iv) Είναι $|\vec{w}|^2 = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 = \left(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 =$

$= 4^2 - 4\cdot 4 + 4\cdot 2^2 = 16 \cancel{-16} \cancel{+16} = 16$

Άρα $|\vec{w}| = \sqrt{16} = 4$

v) Η εξίσωση του κύκλου είναι πλέον $c: x^2 + y^2 - 16x + 12y + 48 = 0$

Τα σημεία τομής του κύκλου με τον άξονα x΄x είναι για $y = 0$

Οπότε : $x^2 - 16x + 48 = 0$

Έχει $\Delta = (-16)^2 - 4\cdot 1\cdot 48 = 256 - 192 = 64$

Άρα $x_{1,2} = \dfrac{16 \pm 8}{2}$ $\left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{16+8}{2} = \dfrac{24}{2} = 12 \\ x_2 = \dfrac{16-8}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{array}\right.$

Δηλαδή τα σημεία $A(12\ ,\ 0)$ και $B(4\ ,\ 0)$

Το κέντρο του κύκλου είναι $K(8\ ,\ -6)$

Έστω (ε_1) η εφαπτομένη στο σημείο $A(12\ ,\ 0)$. Οπότε η (ε_1) είναι κάθετη στην ΚΑ στο Α

$\lambda_{KA}=\dfrac{0-(-6)}{12-8}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$ Οπότε $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{KA}=-1\Rightarrow\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\dfrac{3}{2}=-1\Rightarrow\lambda_{\varepsilon_1}=-\dfrac{2}{3}$

$\varepsilon_1: y-y_A=\lambda_{\varepsilon_1}(x-x_A)\Rightarrow y-0=-\dfrac{2}{3}(x-12)\Rightarrow y=-\dfrac{2}{3}x+8$

Έστω (ε_2) η εφαπτομένη στο σημείο $B(4\ ,\ 0)$. Οπότε η (ε_2) είναι κάθετη στην ΚΒ στο Β

$\lambda_{KB}=\dfrac{0-(-6)}{4-8}=\dfrac{6}{-4}=-\dfrac{3}{2}$ Οπότε $\lambda_{\varepsilon_2}\cdot\lambda_{KB}=-1\Rightarrow\lambda_{\varepsilon_2}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-1\Rightarrow\lambda_{\varepsilon_2}=\dfrac{2}{3}$

$\varepsilon_2: y-y_B=\lambda_{\varepsilon_2}(x-x_B)\Rightarrow y-0=\dfrac{2}{3}(x-4)\Rightarrow y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{3}$