ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 4 / 1 / 2012

ΘΕΜΑ 1ο

Α.
α. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 14
β. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 16

Β. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 28

Γ. $1 \to \Lambda$, $2 \to \Sigma$, $3 \to \Sigma$, $4 \to \Sigma$, $5 \to \Lambda$, $6 \to \Lambda$, $7 \to \Sigma$, $8 \to \Lambda$, $9 \to \Lambda$, $10 \to \Sigma$

Δ. $1 \to \Delta$, $2 \to \Delta$, $3 \to \mathrm{B}$, $4 \to \mathrm{A}$, $5 \to \Delta$

ΘΕΜΑ 2ο

Α.

α) Είναι $f_i\% = 30 \Rightarrow f_i = 0,3 \Rightarrow \frac{\nu_i}{\nu} = 0,3 \Rightarrow \frac{45}{\nu} = 0,3 \Rightarrow 0,3\nu = 45 \Rightarrow \nu = \frac{45}{0,3} \Rightarrow \nu = 150$

β) Είναι $N_2 = 140$ και επειδή $N_3 = \nu = 200$ έχουμε $\nu_3 = N_3 - N_2 = 200 - 140 = 60$

Οπότε $f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{60}{200} = \frac{30}{100} = 0,3$

γ) Για τα αγόρια είναι $\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu_A} \Rightarrow 80 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{5} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i = 400$

Για το σύνολο των παιδιών είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i \nu_i}{\nu} \Rightarrow 72,5 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i \nu_i}{8} \Rightarrow \sum_{i=1}^{8} x_i \nu_i = 72,5 \cdot 8 \Rightarrow \sum_{i=1}^{8} x_i \nu_i = 580$

Οπότε για τα κορίτσια έχουμε $\bar{x}_\kappa = \frac{\sum_{i=6}^{8} x_i \nu_i}{\nu_\kappa} = \frac{580 - 400}{3} = \frac{180}{3} = 60$

Β.

1.
$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{12\left(\sqrt{x} - 2\right)}{x^2 - 7x + 12} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 4} \frac{12\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(x^2 - 7x + 12\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim_{x\to 4} \frac{12\left(\sqrt{x}^2 - 2^2\right)}{\left(x^2 - 7x + 12\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{12\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x-3)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim_{x\to 4} \frac{12}{(x-3)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{12}{(4-3)\left(\sqrt{4}+2\right)} = \frac{12}{1\cdot(2+2)} = \frac{12}{4} = 3$$

2. Επειδή η f συνεχής στο $x_0=4$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)$

Είναι f(4) = β οπότε β = 3

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+\alpha x-\beta\right)=2 \Rightarrow 1^3+\alpha\cdot 1-3=2 \Rightarrow 1+\alpha-3=2 \Rightarrow \alpha=2+2 \Rightarrow \alpha=4$

Γ.

α) Είναι $3x\cancel{+9}+x\cancel{-9}+2x+x+x=360 \Rightarrow 8x=360 \Rightarrow x=\frac{360}{8} \Rightarrow x=45^{o}$

β) Είναι $\alpha_{ΗΡΑ}=\frac{\nu_{ΗΡΑ}}{\nu}360 \Rightarrow 3\cdot 45+9=\frac{80}{\nu}360 \Rightarrow 144=\frac{80}{\nu}360 \Rightarrow \frac{\cancel{144}^{12}}{\cancel{360}^{30}}=\frac{80}{\nu} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12\nu=30\cdot 80 \Rightarrow \nu=\frac{2400}{12} \Rightarrow \nu=200$

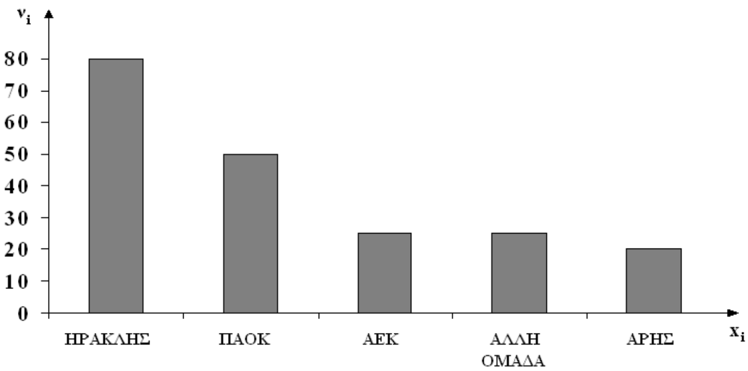
γ) Είναι $\alpha_{ΑΡΗΣ}=\frac{\nu_{ΑΡΗΣ}}{\nu}360 \Rightarrow 45-9=\frac{\nu_{ΑΡΗΣ}}{\cancel{200}^{5}}\cancel{360}^{9} \Rightarrow 36=\frac{9}{5}\nu_{ΑΡΗΣ} \Rightarrow \nu_{ΑΡΗΣ}=\cancel{36}^{4}\frac{5}{\cancel{9}} \Rightarrow \nu_{ΑΡΗΣ}=20$

Ομοίως $\alpha_{ΑΕΚ}=\frac{\nu_{ΑΕΚ}}{\nu}360 \Rightarrow 45=\frac{\nu_{ΑΕΚ}}{\cancel{200}^{5}}\cancel{360}^{9} \Rightarrow 45=\frac{9}{5}\nu_{ΑΕΚ} \Rightarrow \nu_{ΑΕΚ}=\cancel{45}^{5}\frac{5}{\cancel{9}} \Rightarrow \nu_{ΑΕΚ}=25$

Επειδή $\alpha_{ΑΛΛΗ\ ΟΜΑΔΑ}=\alpha_{ΑΕΚ} \Rightarrow \nu_{ΑΛΛΗ\ ΟΜΑΔΑ}=\nu_{ΑΕΚ} \Rightarrow \nu_{ΑΛΛΗ\ ΟΜΑΔΑ}=25$

Επειδή $\alpha_{ΠΑΟΚ}=2\alpha_{ΑΕΚ} \Rightarrow \nu_{ΠΑΟΚ}=2\nu_{ΑΕΚ} \Rightarrow \nu_{ΠΑΟΚ}=2\cdot 25=50$

Το αντίστοιχο ραβδόγραμμα συχνοτήτων είναι :



ΘΕΜΑ 3^{o}

Α.

1. Είναι $g(x)=x^2-2\ln x+7$

Πρέπει $x>0$. Οπότε $A=(0\ ,\ +\infty)$

$$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$$

$$g'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2-2}{x}=0\Rightarrow 2x^2-2=0\Rightarrow 2x^2=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow x=\pm1$$

$$g'(x)>0\Rightarrow\frac{2x^2-2}{x}>0\overset{x>0}{\Rightarrow}2x^2-2>0$$

Άρα

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$2x^2-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε έχουμε :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Στο $(0\ ,\ 1]$ η g(x) είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $[1\ ,\ +\infty)$ η g(x) είναι γνησίως αύξουσα

2. Στο σημείο x = 1 η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με τιμή $g(1)=1^2-2\cancel{\ln 1}^{0}+7=1+7=8$

3. Είναι $g''(x)=\dfrac{\left(2x^2-2\right)'\cdot x-\left(2x^2-2\right)\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{4x\cdot x-\left(2x^2-2\right)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{4x^2-2x^2+2}{x^2}=\dfrac{2x^2+2}{x^2}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-g''(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-\dfrac{2x^2+2}{x^2}}{\dfrac{2x^2-2}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{4x^3-2x^2-2}{x^2}}{\dfrac{2x^2-2}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{x}\left(4x^3-2x^2-2\right)}{x^{\cancel{2}}\left(2x^2-2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{2}\left(2x^3-x^2-1\right)}{\cancel{2}x\left(x^2-1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3-x^2-1}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}$

Για το $2x^3-x-1$ με το σχήμα του Horner για ρ = 1 έχουμε :

2	–1	0	–1	ρ = 1
	2	1	1	
2	1	1	0	

Άρα έχουμε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left(2x^2+x+1\right)}{x\cancel{(x-1)}\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x+1}{x\left(x+1\right)}=\dfrac{2\cdot1^2+1+1}{1\cdot\left(1+1\right)}=\dfrac{4}{2}=2$

Β.

1. Είναι $g''(1)=\dfrac{2\cdot1^2+2}{1}=4$

Οπότε αρχικά ο πίνακας είναι

[,)	Κεντρική τιμή x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
[.. , ..)	2	4			
[.. , ..)			0,2		
[8 , ..)		12		24	
[.. , ..)					0,85
[.. , ..)					
Σύνολο					

Έστω ότι το πλάτος των κλάσεων είναι ίσο με c

Η δεύτερη κλάση είναι $[8-c\ ,\ 8)$ οπότε η πρώτη κλάση είναι $[8-2c\ ,\ 8-c)$ και έχει κέντρο το 2

Οπότε $2=\dfrac{8-2c+8-c}{2}\Rightarrow 4=16-3c\Rightarrow 3c=12\Rightarrow c=4$

Είναι $N_3=24\Rightarrow v_1+v_2+v_3=24\Rightarrow 4+v_2+12=24\Rightarrow v_2=24-16\Rightarrow v_2=8$

Ισχύει $f_2=\dfrac{v_2}{v}\Rightarrow 0,2=\dfrac{8}{v}\Rightarrow 0,2v=8\Rightarrow v=\dfrac{8}{0,2}\Rightarrow v=\dfrac{80}{2}=40$

Άρα $f_1=\dfrac{v_1}{v}=\dfrac{4}{40}=0,1$ και $N_1=v_1=4$ και $F_1=f_1=0,1$

Οπότε $N_2=N_1+v_2=4+8=12$ και $F_2=F_1+f_2=0,1+0,2=0,3$

Είναι $f_3=\dfrac{v_3}{v}=\dfrac{12}{40}=0,3$ οπότε $F_3=F_2+f_3=0,3+0,3=0,6$

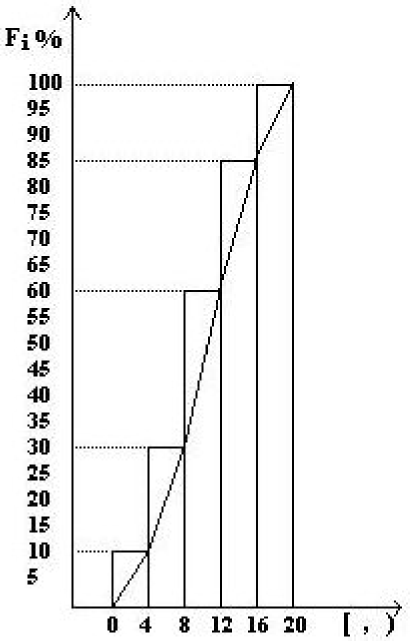
Έχουμε $f_4=F_4-F_3=0,85-0,6=0,25$ άρα $v_4=0,25\cdot 40=10$ και $N_4=N_3+v_4=24+10=34$

Τελικά $\left.\begin{matrix} v_5=N_5-N_4 \\ N_5=v=40 \end{matrix}\right\}\Rightarrow v_5=40-34=6$ οπότε $f_5=\dfrac{6}{40}=0,15$

Άρα ο πίνακας γίνεται

[,)	Κεντρική τιμή x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
[0 , 4)	2	4	0,1	4	0,1
[4 , 8)	6	8	0,2	12	0,3
[8 , 12)	10	12	0,3	24	0,6
[12 , 16)	14	10	0,25	34	0,85
[16 , 20)	18	6	0,15	40	1
Σύνολο		40	1		

2.



3.

Από 8 έως 12 σε πλάτος 4 είναι 30 %
Από 11 έως 12 σε πλάτος 1 είναι x %

Άρα $4x = 30 \Rightarrow x = \dfrac{30}{4} \Rightarrow x = 7{,}5\%$

Από 12 έως 16 είναι 25 %

Από 16 έως 20 σε πλάτος 4 είναι 15 %
Από 16 έως 18 σε πλάτος 2 είναι y %

Άρα $4y = 2 \cdot 15 \Rightarrow y = \dfrac{30}{4} \Rightarrow y = 7{,}5\%$

Συνολικά από 11 έως 18 είναι 7,5 + 25 + 7,5 = 40 %

ΘΕΜΑ 4^o

Α.

α) Είναι $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 1$

Η f διέρχεται από το $A(1\,,\,0)$ οπότε $f(1) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 1^3 + \beta \cdot 1^2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + 1 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -1$ **(1)**

Επίσης είναι $f(2) = 5 \Rightarrow \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + 1 = 5 \Rightarrow 8\alpha + 4\beta + 1 = 5 \Rightarrow 8\alpha + 4\beta = 4$ **(2)**

Από **(1) και (2)** έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = -1 \\ 8\alpha + 4\beta = 4 \end{array}\right\} \overset{\cdot(-4)}{\Rightarrow} \begin{cases} -4\alpha \cancel{-4\beta} = 4 \\ \quad 8\alpha \cancel{+4\beta} + 4 \quad \oplus \end{cases}$$

$$4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

Για α = 2 στην **(1)** έχουμε $2 + \beta = -1 \Rightarrow \beta = -3$

β) Για α = 2 και β = -3 είναι $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

Οπότε $f'(x) = 6x^2 - 6x$ και ο ρυθμός μεταβολής στο $x_0 = 2$ είναι $f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 24 - 12 = 12$

γ) Η εφαπτομένη είναι $\varepsilon:\ y = \lambda x + \beta$

Στο $x_0 = -1$ ισχύει :

$y = f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -2 - 3 + 1 = -4$

$\lambda = f'(-1) = 6(-1)^2 - 6(-1) = 6 + 6 = 12$

Οπότε $y = \lambda x + \beta \Rightarrow -4 = 12(-1) + \beta \Rightarrow -4 = -12 + \beta \Rightarrow \beta = 8$

Άρα η εφαπτομένη $\varepsilon: y = 12x + 8$

δ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}} = \lim_{x\to 0}\frac{6x^2-6x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}} = \frac{6\cdot 0^2 - 6\cdot 0}{\sqrt{5}-\sqrt{0+5}} = \frac{0}{0}$$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{(6x^2-6x)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{(6x^2-6x)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{\sqrt{5}^2-\sqrt{x+5}^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(6x^2-6x)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{\cancel{5}-x-\cancel{5}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(6x-6)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{-\cancel{x}} = \frac{(6\cdot 0-6)\left(\sqrt{5}+\sqrt{0+5}\right)}{-1} = \frac{-6\cdot 2\sqrt{5}}{-1} = 12\sqrt{5}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(2x^3-3x^2+1)\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{1-x^2} = \frac{(2\cdot 1^3-3\cdot 1^2+1)\,\cancelto{1}{\eta\mu\frac{\pi}{2}}}{1-1^2} = \frac{2-3+1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Για το $2x^3-3x^2+1$ κάνουμε σχήμα Horner για $\rho = 1$.

2	−3	0	1	$\rho = 1$
	2	−1	−1	
2	−1	−1	0	

Οπότε το $2x^3-3x^2+1 = (x-1)(2x^2-x-1)$

Άρα $$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x^2-x-1)\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{-\cancel{(1-x)}(2x^2-x-1)\,\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{\cancel{(1-x)}(1+x)} = \frac{-(2\cdot 1^2-1-1)\,\cancelto{1}{\eta\mu\frac{\pi}{2}}}{1+1} =$$

$$= \frac{-(2-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

ε) Είναι $f(x)=2x^3-3x^2+1$ με $A=R$

Επίσης είναι $f'(x)=6x^2-6x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-6x=0 \Rightarrow 6x(x-1)=0 \Rightarrow 6x=0$ ή $x-1=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=1$

$f'(x)>0 \Rightarrow 6x^2-6x>0$

x		0		1	
$6x^2-6x$	+		−		+

Οπότε

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f΄(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗	Τ.Μ	↘	Τ.Ε	↗

Στο $(-\infty\ ,\ 0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Στο $[0\ ,\ 1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $[1\ ,\ +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Στο $x=0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $f(0)=2\cdot 0^3-3\cdot 0^2+1=1$

Στο $x=1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(1)=2\cdot 1^3-3\cdot 1^2+1=2-3+1=0$

στ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι η τιμή της $f'(x)$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f'(x)=6x^2-6x$

Είναι $g'(x)=12x-6$

$$g'(x)=0 \Rightarrow 12x-6=0 \Rightarrow 12x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$g'(x)>0 \Rightarrow 12x-6>0 \Rightarrow 12x>6 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	½	$+\infty$
g΄(x)	−	0	+
g(x)	↘	Τ.Ε	↗

Οπότε για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης

που είναι ίσος με $g\left(\frac{1}{2}\right)=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\cdot\frac{1}{2}=6\cdot\frac{1}{4}-3=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

Β.

1. Έχουμε ότι $\nu=50$, $x_{min}=60$ και $x_{max}=110$ και το πλήθος των κλάσεων είναι $\kappa=5$

Είναι $R=x_{max}-x_{min}=110-60=50$ οπότε το πλάτος $c=\frac{R}{\kappa}=\frac{50}{5}=10$

Άρα οι κλάσεις είναι $[60\ ,\ 70)$, $[70\ ,\ 80)$, $[80\ ,\ 90)$, $[90\ ,\ 100)$, $[100\ ,\ 110)$

Έχουμε ότι $\nu_1 = 4$ οπότε $f_1 = \dfrac{4}{50} = 0,08$ και $N_1 = \nu_1 = 4$ και $F_1 = f_1 = 0,08$

Είναι $\left.\begin{matrix} F_2 = 0,24 \\ f_2 = F_2 - F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_2 = 0,24 - 0,08 = 0,16$

Άρα $\nu_2 = 0,16 \cdot 50 \Rightarrow \nu_2 = 8$ οπότε $N_2 = N_1 + \nu_2 = 4 + 8 = 12$

Είναι $\alpha_4 = \dfrac{\nu_4}{\nu} \cdot 360 \Rightarrow 72 = \dfrac{\nu_4}{50} \cdot 360 \Rightarrow 360\nu_4 = 72 \cdot 50 \Rightarrow \nu_4 = \dfrac{72 \cdot 5\cancel{0}}{36\cancel{0}} \Rightarrow \nu_4 = \dfrac{\cancel{72}^{2} \cdot 5}{\cancel{36}^{1}} \Rightarrow \nu_4 = 10$

Επίσης έχουμε ότι $f_5 = 0,16 \Rightarrow \dfrac{\nu_5}{50} = 0,16 \Rightarrow \nu_5 = 0,16 \cdot 50 \Rightarrow \nu_5 = 8$

Πρέπει $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu \Rightarrow 4 + 8 + \nu_3 + 10 + 8 = 50 \Rightarrow \nu_3 = 50 - 30 = 20$

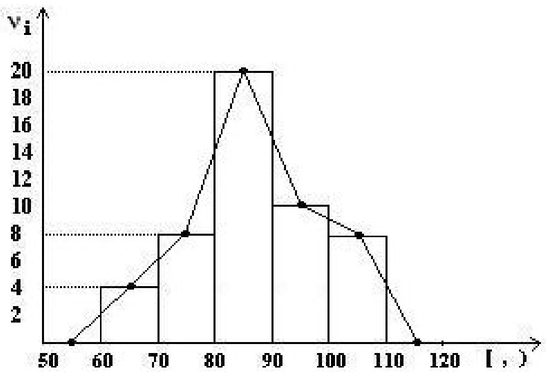
Άρα $f_3 = \dfrac{20}{50} = 0,4$ και $N_3 = N_2 + \nu_3 = 12 + 20 = 32$ και $F_3 = F_2 + f_3 = 0,24 + 0,4 = 0,64$

Οπότε $N_4 = N_3 + \nu_4 = 32 + 10 = 42$ και $F_4 = F_3 + f_4 = 0,64 + 0,2 = 0,84$

Άρα ο πίνακας γίνεται

[,)	ν_i	f_i	N_i	F_i
[60 , 70)	4	0,08	4	0,08
[70 , 80)	8	0,16	12	0,24
[80 , 90)	20	0,4	32	0,64
[90 , 100)	10	0,2	42	0,84
[100 , 110)	8	0,16	50	1
Σύνολο	50	1		

2.



3.
Από 80 έως 90 κιλά σε πλάτος 10 είναι το 40 %

Θέλουμε 84 κιλά δηλαδή το $\dfrac{1}{10}$ οπότε είναι

$\dfrac{1}{10} \cdot 40 = 4\%$

4. Από 100 έως 110 κιλά είναι το 16 %
Οπότε θέλουμε 4 % από την κλάση [90 , 100)
Είναι από 90 έως 100 κιλά σε πλάτος 10 το 20 %
Θέλουμε σε πλάτος x το 4 %

Οπότε $20x = 4 \cdot 10 \Rightarrow x = \dfrac{40}{20} \Rightarrow x = 2$

Άρα θέλουμε αυτούς που έχουν βάρος 100 – 2 = 98
Οπότε πρέπει να έχει βάρος τουλάχιστον 98 κιλά για να κάνει την εξέταση