ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 04-03-12

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α.
α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.
β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.
γ. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.

Β. $1 \to \Lambda$, $2 \to \Lambda$, $3 \to \Lambda$, $4 \to \Sigma$, $5 \to \Lambda$, $6 \to \Lambda$, $7 \to \Sigma$, $8 \to \Lambda$, $9 \to \Lambda$, $10 \to \Lambda$

Γ. $\text{i} \to \Gamma$, $\text{ii} \to \text{B}$, $\text{iii} \to \Gamma$, $\text{iv} \to \text{B}$

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2, 6\}$ και
$P(6) = 2P(4) = 4P(3) = 8P(2) = 8P(1)$ και $P(A) = P(B)$

α. Ισχύει ότι $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(1) + P(1) + 2P(1) + 4P(1) + P(5) + 8P(1) = 1 \Rightarrow 16P(1) + P(5) = 1$ **(1)**
Είναι $P(A) = P(B) \Rightarrow P(1) + P(4) + P(5) = P(2) + P(6) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(1) + 4P(1) + P(5) = P(1) + 8P(1) \Rightarrow 5P(1) + P(5) = 9P(1) \Rightarrow P(5) = 4P(1)$ **(2)**
(1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} 16P(1) + 4P(1) = 1 \Rightarrow 20P(1) = 1 \Rightarrow P(1) = \frac{1}{20}$
Οπότε έχουμε :
$P(6) = 8P(1) \Rightarrow P(6) = 8\frac{1}{20} \Rightarrow P(6) = \frac{2}{5}$
$P(5) = 4P(1) \Rightarrow P(5) = 4\frac{1}{20} \Rightarrow P(6) = \frac{1}{5}$
$P(4) = 4P(1) \Rightarrow P(4) = 4\frac{1}{20} \Rightarrow P(4) = \frac{1}{5}$
$P(3) = 2P(1) \Rightarrow P(3) = 2\frac{1}{20} \Rightarrow P(6) = \frac{1}{10}$
$P(2) = P(1) \Rightarrow P(2) = \frac{1}{20}$

β. Είναι $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0$
Είναι $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ οπότε $P(A \cup B) = P(1) + P(2) + P(4) + P(5) + P(6) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{18}{20} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{9}{10}$

γ. Είναι $f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{(\alpha-1)x^2}{2}+3(\alpha-2)x-2013$

οπότε έχουμε $f'(x)=\frac{3x^2}{6}+\frac{\cancel{2}(\alpha-1)x}{\cancel{2}}+3(\alpha-2)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^2+(\alpha-1)x+3\alpha-6$

Η ευθεία $y=x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$

Οπότε για να είναι οι εφαπτομένες παράλληλες στην $y=x$ πρέπει $f'(x)=1$

$f'(x)=1\Rightarrow\frac{1}{2}x^2+(\alpha-1)x+3\alpha-6=1\Rightarrow\frac{1}{2}x^2+(\alpha-1)x+3\alpha-7=0$

Για να έχουμε ακριβώς 2 εφαπτομένες πρέπει να έχουμε 2 σημεία διαφορετικά σημεία επαφής οπότε η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση να έχει 2 διακεκριμένες λύσεις .

Άρα πρέπει $\Delta>0\Rightarrow(\alpha-1)^2-4\cdot\frac{1}{2}(3\alpha-7)>0\Rightarrow\alpha^2-2\alpha+1-6\alpha+14>0\Rightarrow\alpha^2-8\alpha+15>0$

Έχει $\Delta_\alpha=(-8)^2-4\cdot1\cdot15=64-60=4$

$\alpha_{1,2}=\frac{8\pm2}{2}=\begin{cases}\alpha_1=5\\ \alpha_2=3\end{cases}$

α	$-\infty$	3		5	$+\infty$
$\alpha^2-8\alpha+15$	$+$	0	$-$	0	$+$

Επειδή το σύνολο Γ έχει στοιχεία α του δειγματικού χώρου Ω , είναι $\Gamma=\{1\ ,\ 2\ ,\ 6\}$

Οπότε $P(\Gamma)=P(1)+P(2)+P(6)\Rightarrow P(\Gamma)=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{2}{5}\Rightarrow P(\Gamma)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 3^o

α. Είναι $f(x)=\frac{-x^2+10x-9}{x^2+10x+9}$, πρέπει $x^2+10x+9\neq0$

Η $x^2+10x+9=0$ έχει $\Delta=10^2-4\cdot1\cdot9=100-36=64$

Οπότε $x_{1,2}=\frac{-10\pm8}{2}=\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=-9\end{cases}$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι $A=R-\{-9\ ,\ -1\}$

Είναι $f'(x)=\frac{(-x^2+10x-9)'(x^2+10x+9)-(-x^2+10x-9)(x^2+10x+9)'}{(x^2+10x+9)^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{(-2x+10)(x^2+10x+9)-(-x^2+10x-9)(2x+10)}{(x^2+10x+9)^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\cancel{-2x^3}\ \cancel{-20x^2}\ \cancel{-18x}\ \cancel{+10x^2}\ \cancel{+100x}+90\cancel{+2x^3}\ \cancel{+10x^2}-20x^2\ \cancel{-100x}\ \cancel{+18x}+90}{\left(x^2+10x+9\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-20x^2+180}{\left(x^2+10x+9\right)^2}$$

Οπότε $f'(x)=0\Rightarrow\dfrac{-20x^2+180}{\left(x^2+10x+9\right)^2}=0\Rightarrow -20x^2+180=0\Rightarrow 20x^2=180\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2=\frac{180}{20}\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm\sqrt{9}\Rightarrow x=\pm 3$$

$$f'(x)>0\Rightarrow\frac{-20x^2+180}{\left(x^2+10x+9\right)^2}>0\Rightarrow -20x^2+180>0\Rightarrow 20x^2<180\Rightarrow x^2<9\Rightarrow |x|<3\Rightarrow -3<x<3$$

x	$-\infty$ -9	-9 -3	-3 -1	-1 3	3 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	0 $-$
$f(x)$	↘	↘	↗	↗	↘

Στο $(-\infty\,,-9)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $(-9\,,-3]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $[-3\,,-1)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Στο $(-1\,,3]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Στο $[3\,,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

β. Είναι $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2+12x-13}-1}{\dfrac{-x^2+10x-9}{x^2+10x+9}}=\frac{\sqrt{2\cdot 1^2+12\cdot 1-13}-1}{\dfrac{-1^2+10\cdot 1-9}{1^2+10\cdot 1+9}}=\frac{\sqrt{1}-1}{\dfrac{0}{20}}=\frac{0}{0}$

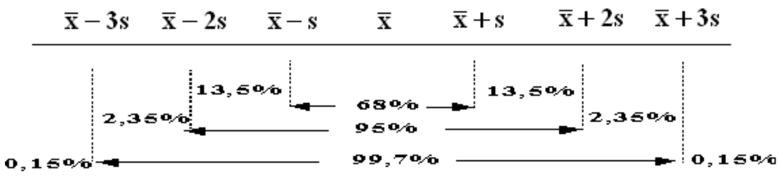
Οπότε $\displaystyle\frac{\sqrt{2x^2+12x-13}-1}{\dfrac{-x^2+10x-9}{x^2+10x+9}}=\frac{\left(\sqrt{2x^2+12x-13}-1\right)\left(\sqrt{2x^2+12x-13}+1\right)}{\dfrac{-x^2+10x-9}{x^2+10x+9}\left(\sqrt{2x^2+12x-13}+1\right)}=$

$$=\frac{\sqrt{2x^2+12x-13}^{\,2}-1^2}{\dfrac{\left(-x^2+10x-9\right)\left(\sqrt{2x^2+12x-13}+1\right)}{x^2+10x+9}}=\frac{\left(x^2+10x+9\right)\left(2x^2+12x-14\right)}{\left(-x^2+10x-9\right)\left(\sqrt{2x^2+12x-13}+1\right)}=$$

$$=\frac{\left(x^2+10x+9\right)\cdot 2\cancel{(x-1)}(x+7)}{-\cancel{(x-1)}(x-9)\left(\sqrt{2x^2+12x-13}+1\right)}=\frac{\left(x^2+10x+9\right)\cdot 2(x+7)}{-(x-9)\left(\sqrt{2x^2+12x-13}+1\right)}$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+10x+9\right)\cdot 2(x+7)}{-(x-9)\left(\sqrt{2x^2+12x-13}+1\right)}=\frac{\left(1^2+10\cdot 1+9\right)\cdot 2(1+7)}{-(1-9)\left(\sqrt{2\cdot 1^2+12\cdot 1-13}+1\right)}=\frac{20\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}\cdot\cancel{2}}=20$

Επειδή το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή έχουμε :



Αφού το 97,5 % είναι μεγαλύτερο από την τιμή του ορίου το 2,5 % είναι μικρότερο από αυτήν

Το 2,5 % είναι το 0,15 % + 2,35 % άρα το σημείο $\bar{x}-2s$

Οπότε ισχύει ότι $\bar{x}-2s=20$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=3$ με τιμή $f(3)=\dfrac{-3^2+10\cdot 3-9}{3^2+10\cdot 3+9}=\dfrac{-18+30}{18+30}=\dfrac{12}{48}=\dfrac{1}{4}$

Άρα $CV=\dfrac{1}{4}\Rightarrow \dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow \bar{x}=4s$ και επειδή $\bar{x}-2s=20$ έχουμε :

$\bar{x}-2s=20\Rightarrow 4s-2s=20\Rightarrow 2s=20\Rightarrow s=10$. Οπότε είναι $\bar{x}=4\cdot 10=40$

γ. Είναι $s^2=\dfrac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{v}t_i^2-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{v}t_i\right)^2}{v}\right]\Rightarrow s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{v}t_i^2}{v}-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{v}t_i\right)^2}{v^2}\Rightarrow s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{v}t_i^2}{v}-(\bar{x})^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 10^2=\dfrac{340000}{v}-40^2\Rightarrow 100+1600=\dfrac{340000}{v}\Rightarrow 1700=\dfrac{340000}{v}\Rightarrow v=\dfrac{340000}{1700}\Rightarrow v=200$

δ. Έχουμε έκπτωση 10 % οπότε για κάθε νέα μεταβλητή y_i ισχύει ότι

$y_i=x_i-\dfrac{10}{100}x_i\Rightarrow y_i=x_i-0{,}1\cdot x_i\Rightarrow y_i=0{,}9\cdot x_i$

δηλαδή έχουμε πολλαπλασιασμό της κάθε αρχικής τιμής με 0,9

Επίσης στην κάθε αρχική τιμή έχουμε πρόσθεση του αριθμού 9 που είναι τα έξοδα αποστολής

Οπότε η νέα μέση τιμή $\bar{y}=0{,}9\cdot\bar{x}+9=0{,}9\cdot 40+9=36+9=45$

Η νέα τυπική απόκλιση $s_y=|0{,}9|\cdot s=0{,}9\cdot 10=9$

Τελικά ο νέος συντελεστής μεταβολής $CV'=\dfrac{s_y}{\bar{y}}=\dfrac{9}{45}=\dfrac{1}{5}$

ε. Για το αρχικό δείγμα ισχύει ότι $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{v}t_i}{v}\Rightarrow 40=\dfrac{\sum_{i=1}^{200}t_i}{200}\Rightarrow \sum_{i=1}^{200}t_i=8000$

Έστω ότι τα προϊόντα που η τιμή τους ελαττώθηκε κατά 5 € είναι κ σε πλήθος

Για το τελικό σύνολο ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{200}t_i'=\sum_{i=1}^{200}t_i+\kappa(-5)\Rightarrow \sum_{i=1}^{200}t_i'=8000-5\kappa$

Άρα από την τελική μέση τιμή που είναι 39 € έχουμε

$$x' = \frac{\sum_{i=1}^{200} t_i'}{\nu} \Rightarrow 39 = \frac{8000 - 5\kappa}{200} \Rightarrow 7800 = 8000 - 5\kappa \Rightarrow 5\kappa = 200 \Rightarrow \kappa = 40$$

ΘΕΜΑ 4ο

Έχουμε τις τιμές $9 , 15 , 21 , 3 , 18 , 6 , 12$ και την $f(x) = s \cdot x^3 - \frac{\bar{x} + R}{4} \cdot x^2 + 2x - 4$

α. Το εύρος R είναι $R = x_{max} - x_{min} = 21 - 3 = 18$

Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{9+15+21+3+18+6+12}{7} = \frac{84}{7} = 12$

Η διακύμανση είναι

$$s^2 = \frac{(9-12)^2 + (15-12)^2 + (21-12)^2 + (3-12)^2 + (18-12)^2 + (6-12)^2 + (12-12)^2}{7} \Rightarrow$$

$\Rightarrow s^2 = \frac{9+9+81+81+36+36+0}{7} = \frac{252}{7} = 36$. Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{36} = 6$

Οπότε η $f(x) = 6x^3 - \frac{12+18}{4} x^2 + 2x - 4 \Rightarrow f(x) = 6x^3 - \frac{30}{4} x^2 + 2x - 4$ με $A = R$

Είναι $f'(x) = 6 \cdot 3x^2 - \frac{30}{4} \cdot 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 18x^2 - 15x + 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 18x^2 - 15x + 2 = 0$. Έχει $\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 18 \cdot 1 = 225 - 144 = 81$

Οπότε $x_{1,2} = \frac{15 \pm 9}{2 \cdot 18} = \begin{cases} x_1 = \frac{24}{2 \cdot 18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{6}{2 \cdot 18} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} \end{cases}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow 18x^2 - 15x + 2 > 0$ (πρόσημο τριωνύμου)

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗		↘		↗

Στο $\left(-\infty , \frac{1}{6}\right]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Στο $\left[\frac{1}{6} , \frac{2}{3}\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $\left[\frac{2}{3} , +\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

β. i)
Το σημείο τομής της f με τον y΄y είναι για x = 0
Η εφαπτομένη (ε) έχει μορφή $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ και στο σημείο x = 0 ισχύει
$y=f(0)=-4$ και $\lambda=f'(0)=2$
Οπότε $y=\lambda x+\beta \Rightarrow -4=2\cdot 0+\beta \Rightarrow -4=\beta$
Άρα η εφαπτομένη είναι $\varepsilon: y=2x-4$

ii) Αφού τα σημεία ανήκουν στην $\varepsilon: y=2x-4$
για την τεταγμένη y_i του κάθε σημείου ισχύει ότι $y_i=2x_i-4$
Οπότε για την νέα μέση τιμή $\overline{y}=2\cdot\overline{x}-4=2\cdot 12-4=24-4=20$
Για την νέα τυπική απόκλιση $s_y=|2|\cdot s=2\cdot 6=12$
Ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων είναι $CV'=\dfrac{s_y}{\overline{y}}=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$

γ. i) Ο συντελεστής μεταβολής του αρχικού δείγματος είναι $CV=\dfrac{s}{\overline{x}}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$
Είναι $f(1)=6\cdot 1^3-\dfrac{30}{4}\cdot 1^2+2\cdot 1-4=6-\dfrac{30}{4}+2-4=4-\dfrac{30}{4}=-\dfrac{14}{4}=-\dfrac{7}{2}$
Οπότε το σύνολο $\Sigma=\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{6},-\dfrac{7}{2}\right\}$. Επειδή το $-\dfrac{7}{2}<0$ δεν μπορεί να είναι τιμή πιθανότητας
Ισχύει ότι $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$
Επειδή είναι $\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}$ έχουμε ότι $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$, $P(A)=\dfrac{1}{2}$ και $P(A\cup B)=\dfrac{2}{3}$

ii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow \dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}+P(B)-\dfrac{1}{6}\Rightarrow P(B)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\Rightarrow P(B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

iii) $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow$
$\Rightarrow P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\Rightarrow P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

iv) $P(B'\cup A)=P(B\cap A')'=P(B-A)'=1-P(B-A)=1-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow P(B'\cup A)=1-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\right)\Rightarrow P(B'\cup A)=1-\dfrac{1}{6}\Rightarrow P(B'\cup A)=\dfrac{5}{6}$