ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ 19/ 4/ 2012

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^o

Α) Ι), ΙΙ) Απόδειξη, σελ. 109

Β) **Λ, Σ, Λ, Σ, Σ, Σ, Λ, Σ, Λ, Σ, Σ, Λ**

Γ) α)-5 , β)-1, γ)-3, δ)-2

Δ)

1. Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου **διχοτομούνται**………….. .
2. Το σημείο τομής των υψών ενός τριγώνου λέγεται …**ορθόκεντρο**………………. .
3. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι …**παράλληλο** προς την τρίτη πλευρά και ίσο με **το μισό της.**
4. Ένα ορθογώνιο με κάθετες διαγωνίους είναι …**τετράγωνο**……………….. .
5. Οι διαγώνιοι ρόμβου …**διχοτομούν**……….. τις γωνίες.
6. Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο αν οι πλευρές του είναι …**ίσες**…….. και οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**…………… .
7. Σε κάθε τραπέζιο η διάμεσος είναι …**παράλληλη προς τις βάσεις**…. και ίση με …**το ημιάθροισμά τους**…………
8. Το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος λέγεται **τετράγωνο** .
9. Σε ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοι είναι …**ίσες**…………. και οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση επίσης ……**ίσες**…………… .
10. Στο τετράγωνο οι διαγώνιοί του έχουν τις εξής ιδιότητες;
    α) …**διχοτομούν τις γωνίες**…………
    β) …**διχοτομούνται**…………
    γ) …**είναι ίσες**……………
    δ) …**τέμνονται κάθετα**……………

ΘΕΜΑ 2°

Α) **1)** Το ΑΒΓ ισοσκελές $\Rightarrow$ ΑΒ=ΑΓ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (1)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ, ΓΔΒ έχουν

{ ΒΓ κοινή, $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ } $\Rightarrow$ ΒΕΓ= ΓΔΒ

Άρα $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow O\hat{B}\Gamma=O\hat{\Gamma}B$ δηλαδή το τρίγωνο ΒΟΓ ισοσκελές.

2) Στο ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \overset{\hat{B}=\hat{\Gamma}=\varphi}{\Rightarrow} \hat{A}+\varphi+\varphi=180^\circ \Rightarrow \hat{A}=180^\circ-2\varphi \quad (2)$$

Στα ορθογώνια ΒΕΓ, ΓΔΒ ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}+\hat{B}_1=90^\circ\\ \hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}_1=90^\circ\end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} \hat{B}+\hat{B}_1+\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}_1=180^\circ \overset{B=\Gamma=\varphi}{\Longrightarrow} \hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1=180^\circ-2\varphi \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1=\hat{A} \overset{B_1=\Gamma_1}{\Longrightarrow} \hat{A}=2O\hat{B}\Gamma=2O\hat{\Gamma}B$$

3) Επειδή ΒΕΓ= ΓΔΒ $\Rightarrow$ ΕΓ= ΒΔ και ΑΓ=ΑΒ άρα

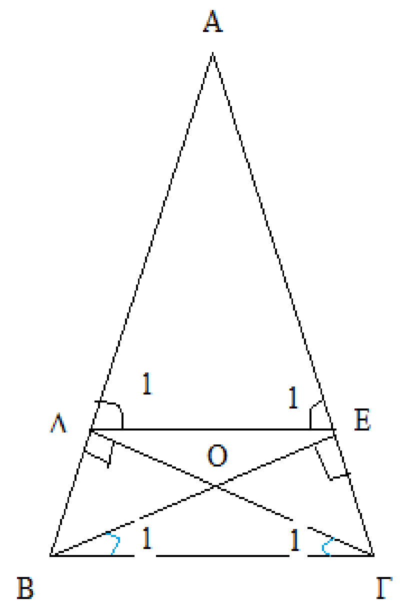
ΑΓ-ΕΓ= ΑΒ-ΔΒ $\Rightarrow$ ΑΔ=ΑΕ $\Rightarrow$ ΑΔΕ ισοσκελές $\Rightarrow \Delta_1=E_1$

και $A+\Delta_1+E_1=180^\circ \Rightarrow A+2\Delta_1=180^\circ \Rightarrow \Delta_1=\dfrac{180^\circ-A}{2}$ (3)

Όμοια στο ισοσκελές ΑΒΓ: από τη σχέση (2) προκύπτει ότι:

$$(2) \Rightarrow \varphi=\frac{180^\circ-\hat{A}}{2} \quad (4)$$

Από (3) και (4) :δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες $\Rightarrow$
Η ΔΕ παράλληλη με τη ΒΓ.



Β) **1)** Φέρνω το ύψος ΓΗ του τραπεζίου. Το ΓΗΑΔ είναι ορθογώνιο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και μια γωνία ορθή. Άρα ΑΗ=ΓΔ= 2x

Επίσης στο ορθογώνιο ΓΗΒ η $\hat{\Gamma}_1=30^\circ \Rightarrow HB=\dfrac{B\Gamma}{2} \Rightarrow HB=\dfrac{8x}{2}=4x$.

Επομένως ΑΒ= 2x+4x=6x

Άρα ΕΖ= $\dfrac{AB+\Gamma\Delta}{2}=\dfrac{6x+2x}{2}=4x$.

Απάντηση: **Β. 4x**

2) Β. 10

Γ) α) Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο επομένως θα ισχύει $\hat{A}=\hat{\Gamma}$ δηλαδή ω=φ. Όμως, $\hat{\varphi}=105^\circ=\hat{\omega}$

β) Γνωρίζουμε ότι αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλα ευθεία που τις τέμνει, επομένως θα έχουμε: ε1//ε2//ε3 , δ1 που τις τέμνει άρα x=4. Ομοίως, ε2//ε3//ε4 και δ2 που τις τέμνει άρα y=3

γ) $ΚΛ = x = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$

δ) $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = 3$, $ΑΓ = 3 = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow \hat{\theta} = 30^\circ$

ΘΕΜΑ 3^o

Α) α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΔ, ΕΗΓ έχουν { ΒΖ= ΗΓ, Β=Γ}
άρα είναι ίσα κι επομένως ΒΔ= ΕΓ.

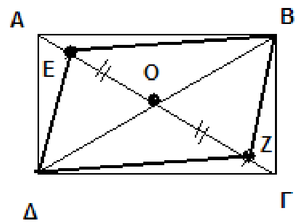
β) Τα τρίγωνα ΒΖΕ, ΔΗΓ έχουν {ΒΖ= ΗΓ, ΒΕ= ΔΓ, Β=Γ} άρα είναι ίσα κι επομένως ΖΕ= ΔΗ.

γ) Τα Ζ, Η μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα άρα ΖΗ//=$\frac{ΒΓ}{2}$ και αφού ΖΔ//= ΗΕ, το ΖΗΔΕ # και επειδή έχει και μια γωνία ορθή επομένως το ΖΗΕΔ ορθογώνιο.

Β) α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι # γιατί ΜΒ// = ΝΓ (ως μισά ίσων και παράλληλων τμημάτων) και επειδή ΑΒ=2ΒΓ$\Rightarrow$ 2ΜΒ = 2ΒΓ $\Rightarrow$ ΜΒ = ΒΓ
άρα το ΜΒΓΝ είναι ρόμβος.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ , η ΕΜ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΒ του τριγώνου. Επομένως ΕΜ=ΜΒ.
Όμως ΜΒΓΝ ρόμβος επομένως ΜΒ= ΜΝ= ΝΓ= ΒΓ και άρα ΜΝ= ΜΕ.

Γ) Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αρκεί ν.δ.ο. ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Στο τετράπλευρο ΒΕΔΖ ισχύει ΕΟ=ΟΖ και ΒΟ=ΟΔ αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο.



Δ) **i)** Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος οπότε οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα αλλά διχοτομούν και τις γωνίες , άρα ΑΟ διχοτόμος της γωνίας Α=> $Α_1$=30°. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ , επειδή $Α_1$=30°, θα ισχύει ότι ΟΒ=$\frac{ΑΒ}{2}$.

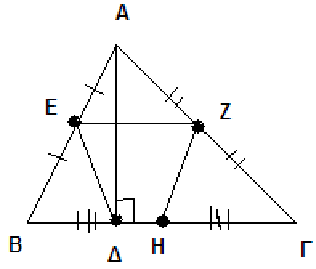
ii) Στο τρίγωνο ΓΒΔ είναι ΓΔ=ΓΒ (ΑΒΓΔ ρόμβος) και επίσης ΒΔ=2·ΟΒ=2$\frac{ΑΒ}{2}$=ΑΒ. Άρα, ΓΒΔ ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 4ο

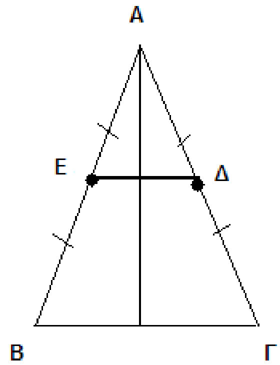
Α) **i)** Επειδή Ε και Ζ μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΕΖ=// $\frac{ΒΓ}{2}$. Επομένως και ΕΖ//ΔΗ.

ii) Επειδή Ζ και Η μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, ΖΗ=// $\frac{ΑΒ}{2}$ =ΒΕ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΒ. Επομένως ΔΕ= $\frac{ΑΒ}{2}$ =ΒΕ. Άρα ΖΗ=ΔΕ.



Β) Πρώτα θα δείξουμε ότι είναι τραπέζιο , δηλαδή ότι έχει δύο πλευρές παράλληλες.
Αφού Ε και Δ μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΕΔ//= $\frac{ΒΓ}{2}$. Άρα αποδείξαμε ότι το ΔΕΒΓ είναι τραπέζιο. Και επειδή, ΕΒ=ΔΓ ως μισά ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, επομένως
το ΔΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Γ) i) Αρχικά, θα δείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές. Συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΕΖ (ΑΕ κοινή, $Α_1 = Α_2$, αφού ΑΔ διχοτόμος), είναι ίσα, άρα και τα υπόλοιπα στοιχεία τους είναι ίσα, δηλαδή, i) ΑΒ= ΑΖ, ii) ΒΕ= ΕΖ , iii) $Β_1 = Ζ_1$.
Από τη σχέση ii) προκύπτει ότι το Ε είναι **μέσο** της ΒΖ.

Στο τρίγωνο ΒΖΓ:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ε μέσο της ΒΖ}\\ \text{Μ μέσο της ΒΓ}\end{array}\right\} \Rightarrow ΕΜ//ΖΓ \Rightarrow ΕΜ//ΑΓ .$$

ii) Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, ισχύει επίσης ότι:

$$\left.\begin{array}{l}ΕΜ = \frac{ΖΓ}{2} \Leftrightarrow ΕΜ = \frac{ΑΓ - ΑΖ}{2}\\ ΑΒ = ΑΖ\end{array}\right\} \Rightarrow ΕΜ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$$