ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 04/11/12

ΘΕΜΑ Α

1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 25
2. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 43
3. α→Λ , β→Σ , γ→Σ , δ→Λ , ε→Λ , στ→Λ , ζ→Σ , η→Λ , θ→Λ , ι→Σ
4. α→Β , β→Γ , γ→Δ , δ→Γ , ε→Δ

ΘΕΜΑ Β

1. Είναι $A(-1,2)$ $B(1,4)$ $\Gamma(-3,4)$

α) $\overrightarrow{AB}=(1-(-1),4-2)=(2,2)$

$\overrightarrow{A\Gamma}=(-3-(-1),4-2)=(-2,2)$

β) Για να είναι κορυφές τριγώνου, αρκεί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ να μην είναι παράλληλα.

$$\det\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-2(-2)=4+4=8\neq 0$$

Άρα τα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα οπότε τα A,B,Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

γ) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

δ) Είναι $(AB)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{8}$ και $(A\Gamma)=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

Αφού $(AB)=(A\Gamma)$ το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ε) Είναι $x_M=\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}=\dfrac{1-3}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$, $y_M=\dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}=\dfrac{4+4}{2}=\dfrac{8}{2}=4$. Άρα $M(-1,4)$

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=(-1-(-1),4-2)=(0,2)$

Οπότε $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=2$

στ) Το $\overrightarrow{AM}=(0,2)$ και το $\overrightarrow{MB}=(1-(-1),\,4-4)=(2,0)$

Οπότε $\vec{u}=2\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{MB}=2(0,2)-3(2,0)=(0,4)-(6,0)=(0-6,4-0)=(-6,4)$

2. $\vec{\alpha}=(2,-4)$, $\vec{\beta}=(-3,-2)$, $\vec{\gamma}=(7,-6)$

Πρέπει να ισχύει $\vec{\gamma}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\Rightarrow(7,-6)=\kappa(2,-4)+\lambda(-3,-2)\Rightarrow$

$\Rightarrow (7,-6)=(2\kappa,-4\kappa)+(-3\lambda,-2\lambda)\Rightarrow(7,-6)=(2\kappa-3\lambda,-4\kappa-2\lambda)$

Οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}2\kappa-3\lambda=7\\-4\kappa-2\lambda=-6\end{array}\right\}\overset{\cdot(2)}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}4\kappa-6\lambda=14\\-4\kappa-2\lambda=-6\end{array}\right.\oplus$$

$$-8\lambda=8\Rightarrow\lambda=-1$$

Για $\lambda=-1$ είναι $2\kappa-3(-1)=7\Rightarrow 2\kappa+3=7\Rightarrow 2\kappa=4\Rightarrow\kappa=2$

Άρα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

1.

α. Είναι $\overrightarrow{OA}=3\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(0\,,\,3)\Rightarrow(x_A-0\,,\,y_A-0)=(0\,,\,3)\Rightarrow x_A=0\,,\,y_A=3$. Άρα $A(0\,,\,3)$

Είναι $\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}-3\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{OB}=(-2\,,\,-3)\Rightarrow(x_B-0\,,\,y_B-0)=(-2\,,\,-3)\Rightarrow x_B=-2\,,\,y_B=-3$

Άρα $B(-2\,,-3)$

Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}=10\vec{i}+2\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{B\Gamma}=(10\,,\,2)\Rightarrow(x_\Gamma+2\,,\,y_\Gamma+3)=(10\,,\,2)\Rightarrow x_\Gamma+2=10\,,\,y_\Gamma+3=2\Rightarrow$

$\Rightarrow x_\Gamma=10-2\,,\,y_\Gamma=2-3\Rightarrow x_\Gamma=8\,,\,y_\Gamma=-1$ Άρα $\Gamma(8\,,\,-1)$

β. Το μέσο Μ του ΒΓ είναι : $x_M=\dfrac{-2+8}{2}=\dfrac{6}{2}=3\,,\,y_M=\dfrac{-3-1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$. Άρα $M(3\,,\,-2)$

Έστω Κ σημείο του y΄y . Άρα το Κ έχει μορφή $K(0\,,\,y)$

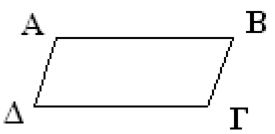
Είναι $(KM)=5\Rightarrow\sqrt{(3-0)^2+(-2-y)^2}=5\Rightarrow\left(\sqrt{9+(-(2+y))^2}\right)^2=5^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 9+(2+y)^2=25\Rightarrow 9+4+4y+y^2=25\Rightarrow y^2+4y-12=0$

Είναι $\Delta=4^2-4\cdot1\cdot(-12)=16+48=64$

$y_{1,2}=\dfrac{-4\pm8}{2}=\begin{cases}y_1=2\\y_2=-6\end{cases}$. Άρα τα σημεία $K_1(0\,,\,2)$ και $K_2(0\,,\,-6)$

γ.



Έστω το σημείο $\Delta(x_\Delta\,,\,y_\Delta)$. Για να είναι το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο αρκεί να είναι $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}\Rightarrow(10\,,\,2)=(x_\Delta-0\,,\,y_\Delta-3)\Rightarrow$

$\Rightarrow x_\Delta=10\,,\,y_\Delta-3=2\Rightarrow x_\Delta=10\,,\,y_\Delta=5$. Άρα το $\Delta(10\,,\,5)$

δ.

Έστω το σημείο $E(x_E\,,\,y_E)$. Τότε $4\overrightarrow{BE}=4(x_E-(-2)\,,\,y_E-(-3))=(4x_E+8\,,\,4y_E+12)$

Είναι $3\overrightarrow{B\Gamma}=3(10\,,\,2)=(30\,,\,6)$ και $\overrightarrow{AB}=(-2-0\,,\,-3-3)=(-2\,,\,-6)$

Οπότε $3\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{AB}=(30\ ,\ 6)-(-2\ ,\ -6)=(30-(-2)\ ,\ 6-(-6))=(32\ ,\ 12)$

Άρα $4\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{AB}\Rightarrow(4x_E+8\ ,\ 4y_E+12)=(32\ ,\ 12)\Rightarrow 4x_E+8=32\ ,\ 4y_E+12=12\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x_E=24\ ,\ 4y_E=0\Rightarrow x_E=6\ ,\ y_E=0$. Άρα το $E(6\ ,\ 0)$

ε. Είναι $\overrightarrow{A\Gamma}=(8-0\ ,\ -1-3)=(8\ ,\ -4)$ και $\overrightarrow{\Gamma E}=(6-8\ ,\ 0-(-1))=(-2\ ,\ 1)$

Ισχύει ότι $-4\overrightarrow{\Gamma E}=-4(-2\ ,\ 1)=(8\ ,\ -4)=\overrightarrow{A\Gamma}$.

Αφού είναι $\overrightarrow{A\Gamma}=-4\overrightarrow{\Gamma E}\Rightarrow\overrightarrow{A\Gamma}\,//\,\overrightarrow{\Gamma E}$, άρα τα Α , Γ , Ε είναι συνευθειακά

2. $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma E}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{AZ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$

α. $\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Gamma E}-\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=$

$=\frac{1}{2}\vec{\beta}-\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\alpha}=\frac{3}{2}\vec{\beta}-\frac{5}{6}\vec{\alpha}$

$\overrightarrow{\Delta Z}=\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{A\Delta}=\frac{3}{5}\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\alpha}$

β. Είναι $\overrightarrow{\Delta Z}=\frac{3}{5}\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\alpha}\Rightarrow\frac{1}{3}\vec{\alpha}=\frac{3}{5}\vec{\beta}-\overrightarrow{\Delta Z}\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}\vec{\alpha}=\frac{9}{5}\vec{\beta}-3\overrightarrow{\Delta Z}$ **(1)**

Είναι

$\overrightarrow{\Delta E}=\frac{3}{2}\vec{\beta}-\frac{5}{6}\vec{\alpha}\overset{(1)}{\Rightarrow}\overrightarrow{\Delta E}=\frac{3}{2}\vec{\beta}-\frac{5}{6}\left(\frac{9}{5}\vec{\beta}-3\overrightarrow{\Delta Z}\right)\Rightarrow\overrightarrow{\Delta E}=\frac{3}{2}\vec{\beta}-\frac{\cancel{5}}{6}\cdot\frac{9}{\cancel{5}}\vec{\beta}+\frac{15}{6}\overrightarrow{\Delta Z}\Rightarrow\overrightarrow{\Delta E}=\frac{3}{\cancel{2}}\cancel{\vec{\beta}}-\frac{3}{\cancel{2}}\cancel{\vec{\beta}}+\frac{15}{6}\overrightarrow{\Delta Z}\Rightarrow$

$\Rightarrow\overrightarrow{\Delta E}=\frac{15}{6}\overrightarrow{\Delta Z}\Rightarrow\overrightarrow{\Delta E}\,//\,\overrightarrow{\Delta Z}$ οπότε Δ, E, Z συνευθειακά.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

1. Είναι $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$ οπότε έχουμε $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$

Με σημείο αναφοράς το Α έχουμε

$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{AO}+2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}\right)-3\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AO}\right)=\vec{0}\Rightarrow$

$\Rightarrow\vec{0}-\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AO}-3\overrightarrow{A\Gamma}+3\overrightarrow{AO}=\vec{0}\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{A\Gamma}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$

Άρα $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{A\Gamma}$ οπότε τα Α , Β , Γ είναι συνευθειακά σημεία

2. Είναι $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\alpha}-3\vec{\gamma}=-2\vec{\beta}\Rightarrow|\vec{\alpha}-3\vec{\gamma}|=|-2\vec{\beta}|\Rightarrow|\vec{\alpha}-3\vec{\gamma}|^2=|-2\vec{\beta}|^2\Rightarrow$

$\Rightarrow(\vec{\alpha}-3\vec{\gamma})^2=(-2\vec{\beta})^2\Rightarrow\vec{\alpha}^2-6\vec{\alpha}\vec{\gamma}+9\vec{\gamma}^2=4\vec{\beta}^2\Rightarrow|\vec{\alpha}|^2-6\vec{\alpha}\vec{\gamma}+9|\vec{\gamma}|^2=4|\vec{\beta}|^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 3^2 - 6\vec{\alpha}\vec{\gamma} + 9\cdot\sqrt{7}^2 = 4\cdot 3^2 \Rightarrow 9 - 6\vec{\alpha}\vec{\gamma} + 63 = 36 \Rightarrow -6\vec{\alpha}\vec{\gamma} = 36 - 72 \Rightarrow -6\vec{\alpha}\vec{\gamma} = -36 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma} = 6$

3. Είναι $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ **(1)** **.** Θέλουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

Είναι $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = 3\vec{\gamma} \Rightarrow |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |3\vec{\gamma}| \Rightarrow |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = |3\vec{\gamma}|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = (3\vec{\gamma})^2 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = 9\vec{\gamma}^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 9|\vec{\gamma}|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\cdot 3^2 = 9\cdot\sqrt{7}^2 \Rightarrow 9 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 36 = 63 \Rightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 63 - 45 \Rightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 18 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = \dfrac{18}{4} = \dfrac{9}{2}$

Οπότε από την **(1)** $\Rightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \dfrac{\frac{9}{2}}{3\cdot 3} = \dfrac{\frac{9}{2}}{9} = \dfrac{9}{2\cdot 9} = \dfrac{1}{2}$. Άρα $\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} = \dfrac{\pi}{3}$

4. Επειδή $\vec{x} \parallel (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \Rightarrow \vec{x} = \lambda(\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ **(1)** όπου λ ένας πραγματικός αριθμός . Αρκεί να βρώ το λ
Είναι $(\vec{x} + \vec{\alpha}) \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \Rightarrow (\vec{x} + \vec{\alpha})\cdot(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = 0 \Rightarrow \vec{x}\vec{\beta} + \vec{x}\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{x}(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) + \dfrac{9}{2} + 6 = 0 \Rightarrow \vec{x}(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = -\dfrac{21}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda(\vec{\beta} - \vec{\gamma})(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = -\dfrac{21}{2} \Rightarrow \lambda(\vec{\beta}^2 - \vec{\gamma}^2) = -\dfrac{21}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda\left(|\vec{\beta}|^2 - |\vec{\gamma}|^2\right) = -\dfrac{21}{2} \Rightarrow \lambda\left(3^2 - \sqrt{7}^2\right) = -\dfrac{21}{2} \Rightarrow \lambda(9 - 7) = -\dfrac{21}{2} \Rightarrow 2\lambda = -\dfrac{21}{2} \Rightarrow \lambda = -\dfrac{21}{4}$

Άρα από την **(1)** $\Rightarrow \vec{x} = -\dfrac{21}{4}(\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \Rightarrow \vec{x} = -\dfrac{21}{4}\vec{\beta} + \dfrac{21}{4}\vec{\gamma}$

5. Είναι $\vec{x} = -\dfrac{21}{4}(\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \Rightarrow |\vec{x}| = \left|-\dfrac{21}{4}(\vec{\beta} - \vec{\gamma})\right| \Rightarrow |\vec{x}|^2 = \left|-\dfrac{21}{4}(\vec{\beta} - \vec{\gamma})\right|^2 \Rightarrow |\vec{x}|^2 = \left(-\dfrac{21}{4}(\vec{\beta} - \vec{\gamma})\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{x}|^2 = \left(\dfrac{21}{4}\right)^2(\vec{\beta}^2 - 2\vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}^2) \Rightarrow |\vec{x}|^2 = \left(\dfrac{21}{4}\right)^2\left(|\vec{\beta}|^2 - 2\vec{\beta}\vec{\gamma} + |\vec{\gamma}|^2\right) \Rightarrow |\vec{x}|^2 = \left(\dfrac{21}{4}\right)^2(9 - 2\vec{\beta}\vec{\gamma} + 7) \Rightarrow$ **(1)**

Είναι $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = -\vec{\alpha} \Rightarrow |2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}| = |-\vec{\alpha}| \Rightarrow |2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}|^2 = |-\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma})^2 = (-\vec{\alpha})^2 \Rightarrow 4\vec{\beta}^2 - 12\vec{\beta}\vec{\gamma} + 9\vec{\gamma}^2 = \vec{\alpha}^2 \Rightarrow 4|\vec{\beta}|^2 - 12\vec{\beta}\vec{\gamma} + 9|\vec{\gamma}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cdot 3^2 - 12\vec{\beta}\vec{\gamma} + 9\cdot\sqrt{7}^2 = 3^2 \Rightarrow 36 - 12\vec{\beta}\vec{\gamma} + 63 = 9 \Rightarrow -12\vec{\beta}\vec{\gamma} = -90 \Rightarrow \vec{\beta}\vec{\gamma} = \dfrac{-90}{-12} \Rightarrow \vec{\beta}\vec{\gamma} = \dfrac{15}{2}$

Από την **(1)** έχουμε

$|\vec{x}|^2 = \left(\dfrac{21}{4}\right)^2\left(9 - 2\dfrac{15}{2} + 7\right) \Rightarrow |\vec{x}|^2 = \left(\dfrac{21}{4}\right)^2\cdot(16 - 15) \Rightarrow |\vec{x}|^2 = \left(\dfrac{21}{4}\right)^2\cdot 1 \Rightarrow |\vec{x}|^2 = \left(\dfrac{21}{4}\right)^2 \Rightarrow |\vec{x}| = \dfrac{21}{4}$