Λύσεις : Διαγώνισμα Άλγεβρα Β΄ Λυκείου   02/12/12

Θέμα 1ο

Α. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 60 .

Β. **1.** Σ **2.** Λ **3.** Λ **4.** Σ **5.** Σ **6.** Σ **7.** Λ **8.** Λ **9.** Σ **10.** Λ

Θέμα 2ο

Α. i) Αν $\varepsilon\varphi x = 2$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$ να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x και να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = 2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 7\sigma\upsilon\nu^2 x$

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x$$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow (2\sigma\upsilon\nu x)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Η γωνία είναι στο 1ο τεταρτημόριο άρα $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sigma\varphi x = \frac{1}{2}$

$$A = 2 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + 7 \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

ii) Να αποδείξετε ότι:

α) $2\varepsilon\varphi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = (\varepsilon\varphi x + 1)^2$

$$2\varepsilon\varphi\theta + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + 1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$(\varepsilon\varphi\theta + 1)^2 = \left(\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + 1\right)^2 = \left(\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2 = \left(\frac{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2 = \frac{\eta\mu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

Άρα $2\varepsilon\varphi\theta + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = (\varepsilon\varphi\theta + 1)^2$

β) $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} = \eta\mu x$

$$1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} = \frac{1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} = \frac{\cancel{1} + \eta\mu x - \cancel{1} + \eta\mu^2 x}{1 + \eta\mu x} =$$

$$= \frac{\eta\mu x\cancel{(1 + \eta\mu x)}}{\cancel{1 + \eta\mu x}} = \eta\mu x$$

B. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x-3y=2 \\ 6y-2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=2 \\ -2x+6y=-4 \end{cases} \overset{(\cdot 2)}{\underset{(\cdot 1)}{\Leftrightarrow}} \underbrace{\begin{cases} 2x-6y=4 \\ -2x+6y=-4 \end{cases}}_{+}$ αόριστο σύστημα,

ii) $\begin{cases} x^2=2y+10 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2y+10 \\ 2y+10+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2y+10 \\ y^2+2y-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2y+10 \\ y=-5 \ \ \acute{\eta} \ \ y=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=2(-5)+10 \\ y=-5 \end{cases} \ \acute{\eta} \ \begin{cases} x^2=2(3)+10 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ y=-5 \end{cases} \ \acute{\eta} \ \begin{cases} x^2=16 \\ y=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \ \delta\iota\pi\lambda\acute{\eta} \\ y=-5 \end{cases} \ \acute{\eta} \ \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \ \acute{\eta} \ \begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases} \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \ \ (0,-5),\ (4,3),(-4,3)$

Θέμα 3ο

A. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $\varepsilon\varphi\left(495^0\right)=\varepsilon\varphi\left(360^0+135^0\right)=\varepsilon\varphi\left(135^0\right)=\varepsilon\varphi\left(180^0-45^0\right)=-\varepsilon\varphi 45^0=-1$

$\sigma\upsilon\nu\left(-120^0\right)=\sigma\upsilon\nu\left(120^0\right)=\sigma\upsilon\nu\left(180^0-60^0\right)=-\sigma\upsilon\nu 60^0=-\frac{1}{2}$

$\eta\mu\left(-30^0\right)=-\eta\mu 30^0=-\frac{1}{2}$

$A=4\varepsilon\varphi\left(495^0\right)\sigma\upsilon\nu\left(-120^0\right)\eta\mu\left(-30^0\right)=4(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

ii) $$\mathrm{B}=\frac{\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(11\pi+\theta)\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(17\pi+\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2}+\theta\right)}$$

$\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

$\varepsilon\varphi(11\pi+\theta)=\varepsilon\varphi(10\pi+\pi+\theta)=\varepsilon\varphi(\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta$

$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

$\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{12\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(6\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta$

$$\sigma\upsilon\nu(17\pi+\theta)=\sigma\upsilon\nu(16\pi+\pi+\theta)=\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{18\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(9\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(8\pi+\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\varepsilon\varphi\theta$$

Επομένως $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(11\pi+\theta)\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(17\pi+\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2}+\theta\right)}=\dfrac{-\sigma\upsilon\nu\theta(\varepsilon\varphi\theta)(-\sigma\upsilon\nu\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta(-\sigma\upsilon\nu\theta)(-\varepsilon\varphi\theta)}=1$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-2x^2+1$

α) $A_f=R$, $f(0)=1$,

Για κάθε $x\in A_f$ *και το* $-x\in A_f$

$f(-x)=-2(-x)^2+1=-2x^2+1=f(x)$ άρα η $f(x)$ είναι άρτια .

β) *Έστω* $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ *με* $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow -2x_1^2>-2x_2^2\Leftrightarrow$
$-2x_1^2+1>-2x_2^2+1\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Άρα η $f(x)$ είναι γν.φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

γ) Για κάθε $x\in R$ ισχύει $\mathrm{x}^2\geq 0\overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow}-2\mathrm{x}^2\leq 0\overset{+(1)}{\Leftrightarrow}-2\mathrm{x}^2+1\leq 1\Leftrightarrow \mathrm{f(x)}\leq 1\Leftrightarrow \mathrm{f(x)}\leq \mathrm{f(0)}$

Επομένως η $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=1$.

δ) $\varphi(x)=f(x-3)-1=-2(x-3)^2+1-1=-2(x-3)^2$

ε) Αν $\varphi(x)=-2(x-3)^2$, να λυθεί η ανίσωση στο $[0,+\infty)$

$\varphi(x+4)+1<f(3-x)\Leftrightarrow -2(x+1)^2+1<f(3-x)\Leftrightarrow f(x+1)<f(3-x)\xrightarrow{f\,\gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}$
$x+1>3-x\Leftrightarrow 2x>2\Leftrightarrow x>1$

Θέμα 4ο

Α. $D=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 4\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)-2\cdot 4=\lambda^2-1-8=\lambda^2-9=(\lambda-3)(\lambda+3)$

$D_x=\begin{vmatrix}-2\lambda & 4\\ -\lambda & \lambda-1\end{vmatrix}=-2\lambda(\lambda-1)+4\lambda=-2\lambda^2+2\lambda+4\lambda=-2\lambda^2+6\lambda=-2\lambda(\lambda-3)$

$D_y=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2\lambda\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)+4\lambda=-\lambda^2-\lambda+4\lambda=-\lambda^2+3\lambda=-\lambda(\lambda-3)$

Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+3)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 3 \; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda\neq -3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την

(x,y) $\;\acute{o}\pi o\upsilon\;$ $x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$ $\;\Leftrightarrow\;$ $x=\dfrac{-2\lambda(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}=\dfrac{-2\lambda}{\lambda+3}$, $y=\dfrac{-\lambda(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}=\dfrac{-\lambda}{\lambda+3}$

Επομένως για $\lambda\neq 3 \; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda\neq -3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$(x,y)=\left(-\frac{2\lambda}{\lambda+3},-\frac{\lambda}{\lambda+3}\right)$$

Αν $D=0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+3)=0 \Leftrightarrow \lambda=3 \; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda=-3$ το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει

άπειρες λύσεις ,

Όταν $\lambda=3$ το αρχικό σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases}(\lambda+1)x+4y=-2\lambda\\ 2x+(\lambda-1)y=-\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3+1)x+4y=-2\cdot 3\\ 2x+(3-1)y=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+4y=-6\\ 2x+2y=-3\end{cases}$$, οι εξισώσεις ταυτίζονται

άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\left(k,-\dfrac{2+3k}{2}\right), k\in R$

Όταν $\lambda=-3$ το αρχικό σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases}(\lambda+1)x+4y=-2\lambda\\ 2x+(\lambda-1)y=-\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-3+1)x+4y=-2\cdot(-3)\\ 2x+(-3-1)y=-(-3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+4y=6\\ 2x-4y=3\end{cases}$$ και το σύστημα είναι

αδύνατο.

β) Για τιμές του $\lambda\in R$, οι ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του παραπάνω συστήματος , τέμνονται , είναι παράλληλες ή ταυτίζονται;

Τέμνονται για για $\lambda\neq 3 \; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda\neq -3$, είναι παράλληλες για $\lambda=-3$ και ταυτίζονται για $\lambda=3$

Β. α)

$f(-1)=-2 \Leftrightarrow \dfrac{(-1)^3-3(-1)}{(-1)^2+\alpha|-1|}=-2 \Leftrightarrow \dfrac{-1+3}{1+\alpha}=-2 \Leftrightarrow -2-2\alpha=2 \Leftrightarrow -2\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=-2$ Άρα

$f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x^2-2|x|}$, $\pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\;\; x^2-2|x|\neq 0 \Leftrightarrow |x|^2-2|x|\neq 0 \Leftrightarrow |x|(|x|-2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \;\kappa\alpha\iota\; x\neq \pm 2$

Επομένως $A_f=R-\{-2,0,2\}$

β) Να εξετάσετε αν η $f(x)$ είναι άρτια ή περιττή .

Για κάθε $x \in A_f$ $\kappa\alpha\iota$ τo $-x \in A_f$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 - 2|-x|} = \dfrac{-x^3 + 3x}{x^2 - 2|x|} = -\dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 2|x|} = -f(x)$ άρα η $f(x)$ είναι περιττή .

γ) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 = \dfrac{f(2012)}{f(-2012)}x$

$f(-x) = -f(x)$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $f(-2012) = -f(2012)$

$$x^2 = \frac{f(2012)}{-f(2012)}x \Leftrightarrow x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ } \acute{\eta} \text{ } x = -1$$