ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 05-02-12

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$ ισούται με $P(\rho)$.
Θεωρία σελ.68

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

1. Η εξίσωση $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2$ είναι αδύνατη . **Σ**

2. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού . **Λ**

3. Στη διαίρεση πολυωνύμων ο βαθμός του υπολοίπου είναι μικρότερος ή ίσος από το βαθμό του διαιρέτη. **Λ**

4. Είναι $\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$. **Σ**

5. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ είναι το $A_f=(0,+\infty)$. **Λ**

6. Η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα . **Σ**

7. Ισχύει $3^x\geq 0$ για κάθε $x\in R$. **Σ**

8. Το πολυώνυμο $P(x)=(3x-4)^{2009}+(2x^2-1)^{2010}$ έχει ρίζα τον αριθμό 1 . **Σ**

9. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=3x^{2008}-2x^{2006}+x^{2010}$ με το $(x+1)$ είναι το -1 . **Λ**

10. Αν το πολυώνυμο $P(x)=(x-1)^6-(2x-\kappa)^2$ έχει παράγοντα το $(x-2)$,τότε $\kappa=3$ ή $\kappa=5$. **Σ**

Γ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta$ έχει λύσεις :

Α. $x=\kappa\pi\pm\theta$ Β. $x=2\kappa\pi+\theta$ ή $x=2\kappa\pi+\pi-\theta$ **<u>Γ. $x=2\kappa\pi\pm\theta$</u>** Δ. $x=\kappa\pi+\pi+\theta$

2. Το $\sigma\upsilon\nu(5\pi-x)$ με $0<x<\frac{\pi}{2}$ ισούται με:

<u>Α. – συνx</u> Β. συνx Γ. – ημx Δ. ημx

3. Αν το πολυώνυμο $(\lambda^2+2\lambda)x^3+(\lambda^2-4)x^2+\lambda x-\lambda+1$ είναι 1^{ου} βαθμού, τότε

Α. $\lambda=0$ **<u>Β. $\lambda=-2$</u>** Γ. $\lambda=2$ Δ. $\lambda=1$

4. Η εξίσωση $e^{x^2+2x+1}=-1$ έχει λύση :

Α. $x=0$ Β. $x=-1$ **<u>Γ. είναι αδύνατη</u>** Δ. $x=1$

5. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ είναι :

Α. $[0,+\infty)$ **<u>Β. $(0,+\infty)$</u>** Γ. όλο το R Δ. $(1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 2^o

A. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i) $1+\sqrt{3x+1}=x \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=x-1$, πρέπει $3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{3}$

$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x+1=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=5$

αρκεί να επαληθεύουν και την αρχική εξίσωση

Και οι δύο λύσεις ικανοποιούν τον περιορισμό

για $x=0$ $\sqrt{1}=-1$ άρα απορρίπτεται

για $x=5$ $\sqrt{16}=4$,άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=5$

ii) $9^{x+1}-4^{x+2}=44\cdot 4^{x-1}+3^{2x} \Leftrightarrow 9^x\cdot 9-4^x\cdot 4^2=44\cdot 4^x\cdot 4^{-1}+3^{2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\cdot 3^{2x}-16\cdot 4^x=\dfrac{44}{4}\cdot 4^x+3^{2x} \Leftrightarrow 9\cdot 3^{2x}-3^{2x}=11\cdot 4^x+16\cdot 4^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\cdot 3^{2x}=27\cdot 4^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}=\dfrac{27}{8} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 \xrightarrow{1-1} 2x=3 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

B. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i) πρέπει $x\neq 0$ και $x\neq -1$

$\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+2}{x}<2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+2}{x}-2<0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-(x+2)(x+1)-2x(x+1)}{x(x+1)}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-x-2x-2-2x^2-2x}{x(x+1)}<0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2-5x-2}{x(x+1)}<0 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{2x^2+5x+2}{x(x+1)}>0$

Οπότε έχουμε $x(x+1)\left(2x^2+5x+2\right)>0$

Είναι $x=0$ ή $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=-\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
x	−		−	‖	−		−	0	+
x+1	−		−	0	+		+	‖	+
$2x^2+5x+2$	+	0	−	‖	−	0	+	‖	+
P(x)	+	0	−	‖	+	0	−	‖	+

Άρα $x\in(-\infty,-2)\cup\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$

ii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-7x+6} > 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-7x+6} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0} \xrightarrow{\text{γνησ.φθίνουσα}} x^2-7x+6<0$

x	$-\infty$ 1 6 $+\infty$
x^2-7x+6	+ 0 − 0 +

Οπότε $x \in (1\,,\,6)$

ΘΕΜΑ 3^{o}

Α.

Αν το x – 2 διαιρεί το P(x) και δίνει υπόλοιπο 3 και το x + 3 διαιρεί το P(x) και δίνει υπόλοιπο –2 , να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x – 2)(x + 3)

Το x – 2 διαιρεί το P(x) και δίνει υπόλοιπο 3 , άρα P(2) = 3 **(1)**

Το x +3 διαιρεί το P(x) και δίνει υπόλοιπο –2 , άρα P(–3) = –2 **(2)**

Θέλω να βρω το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x) : (x – 2)(x + 3).

Παρατηρούμε ότι ο διαιρέτης: (x – 2)(x + 3) είναι δευτέρου βαθμού , άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι το πολύ πρώτου βαθμού δηλαδή της μορφής υ(x) = αx + β .

Η ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το (x – 2)(x + 3) είναι :

$P(x)=(x-2)(x+3)\cdot\pi(x)+\alpha x+\beta$

$$\left.\begin{array}{l}\text{για } x=2 \text{ είναι } P(2)=3\\ \text{για } x=-3 \text{ είναι } P(-3)=-2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\cancel{(2-2)}^{0}\,\cancel{(2+3)\pi(2)}+2\alpha+\beta=3\\ \cancel{(-3-2)}\,\cancel{(-3+3)}^{0}\,\cancel{\pi(-3)}-3\alpha+\beta=-2\end{array}\right| \underset{\cdot(-1)}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}2\alpha+\cancel{\beta}=3\\ 3\alpha-\cancel{\beta}=2\end{array}\right. \oplus$$

$$5\alpha=5\Rightarrow\alpha=1$$

Άρα $2\alpha+\beta=3\Rightarrow 2+\beta=3\Rightarrow\beta=1$. Επομένως $\upsilon(x)=x+1$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha-1}{5}\right)^{x}$ με $\alpha\in R$

α) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως φθίνουσα .

Πρέπει $0<\dfrac{\alpha-1}{5}<1\overset{\cdot(5)}{\Leftrightarrow}0<\alpha-1<5\overset{+1}{\Leftrightarrow}0+1<\alpha\cancel{-1}\,\cancel{+1}<5+1\Leftrightarrow1<\alpha<6$

β) Αν α = 11 να λύσετε την εξίσωση : $f(x)+4f(1-x)=6$

Για α = 11 είναι

$f(x)=\left(\dfrac{\alpha-1}{5}\right)^{x}=\left(\dfrac{11-1}{5}\right)^{x}=2^{x}$

$f(x)+4f(1-x)=6\Leftrightarrow 2^{x}+4\cdot2^{1-x}=6\Leftrightarrow 2^{x}+\dfrac{4\cdot2}{2^{x}}=6\overset{\cdot2^{x}}{\Leftrightarrow}2^{2x}+8=6\cdot2^{x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(2^{x}\right)^{2}-6\cdot2^{x}+8=0$, θέτω $2^{x}=y$

Οπότε έχουμε $y^2-6y+8=0 \Leftrightarrow y=2$ ή $y=4$

Άρα $2^x=2 \Leftrightarrow x=1$ ή $2^x=4 \Leftrightarrow x=2$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^4+\beta x^3+1$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε το $(x-1)^2$ να είναι παράγοντας του $P(x)$.

Άρα το 1 θα είναι ρίζα και στο P(x) και στο πηλίκο π(x) .

Με το σχήμα Horner για ρ = 1 έχουμε

α	β	0	0	1	1
	α	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	
α	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta+1$	

Άρα $\alpha+\beta+1=0$ **(1)**

Είναι $\pi(x)=\alpha x^3+(\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha+\beta$

Οπότε πάλι με το σχήμα Horner για ρ = 1

α	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	1
	α	$2\alpha+\beta$	$3\alpha+2\beta$	
α	$2\alpha+\beta$	$3\alpha+2\beta$	$4\alpha+3\beta$	

Άρα $4\alpha+3\beta=0$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** έχουμε

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=-1\\4\alpha+3\beta&=0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}-3\alpha\cancel{-3\beta}&=3\\4\alpha\cancel{+3\beta}&=0\end{aligned}\right. \oplus$$

$\alpha=3$ επομένως $\beta=-4$

β) Για $\alpha=3$ και $\beta=-4$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

$P(x)=0 \Rightarrow 3x^4-4x^3+1=0$

Με το σχήμα Horner για ρ = 1 έχουμε

3	–4	0	0	1	1
	3	–1	–1	–1	
3	–1	–1	–1	0	

Άρα είναι $3x^4-4x^3+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^3-x^2-x-1)=0$ **(1)**

Για το $3x^3 - x^2 - x - 1$ με το σχήμα Horner για ρ = 1 έχουμε

3	–1	–1	–1	1
	3	2	1	
3	2	1	0	

Άρα $3x^3 - x^2 - x - 1 = (x-1)(3x^2+2x+1)$ **(2)**

Τελικά από **(1)** και **(2)** είναι

$$(x-1)(x-1)(3x^2+2x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2+2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (διπλή)}$$

το $(3x^2+2x+1)$ έχει αρνητική διακρίνουσα άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση του P(x) δεν βρίσκεται ποτέ κάτω από τον άξονα x΄x

Είναι $P(x) = (x-1)^2(3x^2+2x+1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		+	0	+	
$3x^2+2x+1$		+		+	
P(x)		+	0	+	

Είναι $P(x) \geq 0$. Άρα βρίσκεται πάντα πάνω από τον άξονα x΄x και για x = 1 εφάπτεται με αυτόν
Για καμιά τιμή του x δεν είναι $P(x) < 0$, δηλαδή για καμιά τιμή του x δεν είναι κάτω από τον άξονα x΄x .

δ) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) P(ημx) = 0

$$P(\eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow 3\eta\mu^4 x - 4\eta\mu^3 x + 1 = 0 \quad \text{θέτω } \eta\mu x = y$$

$$3y^4 - 4y^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2(3y^2+2y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

$$\text{Άρα} \quad \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ \kappa \in Z$$

ii) $\sqrt{P(x)} = (1-x)|x-1|$

Είναι $P(x) \geq 0$ για κάθε x

$$\sqrt{P(x)} = (1-x)|x-1| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2(3x^2+2x+1)} = (1-x)|x-1| \Leftrightarrow \text{υψώνω στο τετράγωνο}$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2+2x+1)=(1-x)^2|x-1|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2+2x+1)-(1-x)^2(x-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(3x^2+2x+1-\left(1-2x+x^2\right)\right) \Leftrightarrow (x-1)^2\left(3x^2+2x\cancel{+1}\cancel{-1}+2x-x^2\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(2x^2+4x\right)=0 \Leftrightarrow 2x(x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-2$

Επαληθεύουν και την αρχική εξίσωση άρα είναι δεκτές .