ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 05 / 02 / 12

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 90

Β.

- Αν έχει 2 ρίζες x_1 , x_2 τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$
- Αν έχει 1 ρίζα x_0 διπλή τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_0)^2$
- Αν δεν έχει ρίζες δεν γράφεται ως γινόμενο.

Γ. $1\to\Lambda$, $2\to\Lambda$, $3\to\Sigma$, $4\to\Lambda$, $5\to\Sigma$

Δ. $\alpha\to A$, $\beta\to\Gamma$, $\gamma\to\Gamma$, $\delta\to\Gamma$, $\varepsilon\to\Delta$

ΘΕΜΑ 2^{o}

Α. Είναι $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3^2-\sqrt{6}^2}=$

$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{9-6}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}^2=3$

Β. Έστω ότι $(\alpha-\beta)^2+24\beta^2\ge 8\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+24\beta^2\ge 8\alpha\beta\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha\beta+25\beta^2-8\alpha\beta\ge 0\Leftrightarrow\alpha^2-10\alpha\beta+25\beta^2\ge 0\Leftrightarrow(\alpha-5\beta)^2\ge 0$ ισχύει

Γ.

α) $(2x+3)(4x+7)=16x^2-49\Rightarrow(2x+3)(4x+7)=(4x)^2-7^2\Rightarrow$

$\Rightarrow(2x+3)(4x+7)=(4x+7)(4x-7)\Rightarrow(2x+3)(4x+7)-(4x+7)(4x-7)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(4x+7)\big(2x+3-(4x-7)\big)=0\Rightarrow(4x+7)(2x+3-4x+7)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow(4x+7)(-2x+10)=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}4x+7=0\\ \acute{\eta}\\ -2x+10=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}4x=-7\\ \acute{\eta}\\ -2x=-10\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=\dfrac{-7}{4}\\ \acute{\eta}\\ x=\dfrac{-10}{-2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=-\dfrac{7}{4}\\ \acute{\eta}\\ x=5\end{matrix}\right.$$

$$\textbf{β)}\ |x+1|=|3x-2|\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x+1=3x-2\\ \acute{\eta}\\ x+1=-(3x-2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x-3x=-2-1\\ \acute{\eta}\\ x+1=-3x+2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}-2x=-3\\ \acute{\eta}\\ x+3x=2-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{-3}{-2} \\ \text{ή} \\ 4x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{3}{2} \\ \text{ή} \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array} \right.$$

Δ. Είναι $(\lambda^2 - 9)x - 3 = \lambda \Rightarrow (\lambda^2 - 9)x = \lambda + 3 \Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 3)x = \lambda + 3$ **(1)**

Για $(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda + 3 = 0$ ή $\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$ ή $\lambda = 3$

Αν $\lambda = -3$ τότε από την **(1)** έχουμε $\cancel{(-3+3)}^{0}(-3-3)x = -3 + 3 \Rightarrow 0x = 0$ αόριστη

Αν $\lambda = -3$ τότε από την **(1)** έχουμε $(3+3)\cancel{(3-3)}^{0}x = 3 + 3 \Rightarrow 0x = 6$ αδύνατη

Για $(\lambda + 3)(\lambda - 3) \neq 0 \Rightarrow \lambda + 3 \neq 0$ και $\lambda - 3 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -3$ και $\lambda \neq 3$ τότε από την **(1)** έχω μοναδική λύση $x = \dfrac{\cancel{\lambda+3}}{\cancel{(\lambda+3)}(\lambda-3)} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\lambda - 3}$

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Α. Είναι $A = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + 5\lambda + 10$ και $B = x^2 + 4x + 4\lambda + 16$

Το Α έχει ρίζα το $x = 2$. Οπότε για $x = 2$ έχουμε

$$2^2 + 2\lambda \cdot 2 + \lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0 \Rightarrow 4 + 4\lambda + \lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 81 - 56 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-9+5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ \\ \dfrac{-9-5}{2} = \dfrac{-14}{2} = -7 \end{array} \right.$$

Το Β αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.

Άρα $\Delta \geq 0 \Rightarrow 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4\lambda + 16) \geq 0 \Rightarrow 16 - 16\lambda \cdot 64 \geq 0 \Rightarrow -16\lambda - 48 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -16\lambda \geq 48 \Rightarrow \lambda \leq \dfrac{48}{-16} \Rightarrow \lambda \leq -3$

Επειδή $\lambda = -7$ ή $\lambda = -2$ και $\lambda \leq -3$. Άρα $\lambda = -7$.

Β. Για $\lambda = -7$ είναι:

$A = x^2 + 2(-7)x + (-7)^2 + 5(-7) + 10 = x^2 - 14x + 49 - 35 + 10 = x^2 - 14x + 24$

$B = x^2 + 4x + 4(-7) + 16 = x^2 + 4x - 28 + 16 = x^2 + 4x - 12$

Οπότε έχουμε $\frac{A}{B}=\frac{x^2-14x+24}{x^2+4x-12}$

Είναι $x^2-14x+24=0$ έχει $\Delta=(-14)^2-4\cdot1\cdot24=196-96=100$

$$x_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{14\pm10}{2}\begin{cases}\frac{14+10}{2}=\frac{24}{2}=12\\[2ex]\frac{14-10}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}$$

Είναι $x^2+4x-12=0$ έχει $\Delta=4^2-4\cdot1\cdot(-12)=16+48=64$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-4\pm8}{2}\begin{cases}\frac{-4+8}{2}=\frac{4}{2}=2\\[2ex]\frac{-4-8}{2}=\frac{-12}{2}=-6\end{cases}$$

Άρα είναι $\frac{A}{B}=\frac{(x-12)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+6)}=\frac{x-12}{x+6}$

Γ. Είναι $A+25=x^2-14x+24+25=x^2-14x+49$

Έχει $\Delta=(-14)^2-4\cdot1\cdot49=196-196=0$, οπότε έχει μια διπλή λύση $x_0=\frac{14}{2}=7$

Άρα $x^2-14x+49=(x-7)^2$

(β τρόπος : παρατηρώ ότι είναι ανάπτυγμα ταυτότητας)

Είναι $B+16=x^2+4x-12+16=x^2+4x+4$

Οπότε $x^2+4x+4=(x+2)^2$

(β τρόπος : βρίσκω $\Delta=0$ και μια διπλή λύση $x_0=-2$)

Δ. Είναι $\frac{\sqrt{B+16}}{3}-\frac{\sqrt{A+25}}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{3}-\frac{\sqrt{(x-7)^2}}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{|x+2|}{3}-\frac{|x-7|}{2}=\frac{1}{2}$

Επειδή $2<x<7$ έχουμε:

$x+2>0$ οπότε $|x+2|=x+2$

$x-7<0$ οπότε $|x-7|=-x+7$

Άρα $\frac{x+2}{3}-\frac{-x+7}{2}=\frac{1}{2}\overset{\cdot 6}{\Rightarrow}\cancel{6}^2\cdot\frac{x+2}{\cancel{3}}-\cancel{6}^3\cdot\frac{-x+7}{\cancel{2}}=6\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x+2)-3(-x+7)=3 \Rightarrow 2x+4+3x-21=3 \Rightarrow 5x=3-4+21 \Rightarrow 5x=20 \Rightarrow x=\frac{20}{5} \Rightarrow x=4$

Η λύση είναι δεκτή αφού $2<x<7$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Είναι $x^2-12x+27 \geq 0$

Οπότε για το $x^2-12x+27=0$

$\Delta=(-12)^2-4\cdot 1\cdot 27=144-108=36$

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{12\pm 6}{2}\begin{cases}\frac{12+6}{2}=\frac{18}{2}=9\\ \frac{12-6}{2}=\frac{6}{2}=3\end{cases}$$

x	$-\infty$		3		9		$+\infty$
$x^2-12x+27$		+	0	−	0	+	

Επειδή τα x είναι στοιχεία του Ω , άρα $A=\{1,2,3,9,10\}$

Είναι $x^2-11x+30 \leq 0$

Οπότε για το $x^2-11x+30=0$

$\Delta=(-11)^2-4\cdot 1\cdot 30=121-120=1$

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{11\pm 1}{2}\begin{cases}\frac{11+1}{2}=\frac{12}{2}=6\\ \frac{11-1}{2}=\frac{10}{2}=5\end{cases}$$

x	$-\infty$		5		6		$+\infty$
$x^2-11x+30$		+	0	−	0	+	

Επειδή τα x είναι στοιχεία του Ω , άρα $B=\{5,6\}$

Β. Είναι $A\cup B=\{1,2,3,5,6,9,10\}$ και $A\cap B=\{\ \}$ (δεν έχουν κοινά στοιχεία)

Γ.

i) Είναι $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{5}{10}$ και $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{2}{10}$

ii) Τουλάχιστον ένα από τα Α ή Β , θέλουμε $P(A\cup B)$.

Επειδή το $A\cap B=\{\ \}$ τα Α , Β είναι ασυμβίβαστα.

Οπότε $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}$

iii) Κανένα από τα Α και Β, θέλουμε $P(A\cup B)'$

$P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$