ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 30/10/11

ΘΕΜΑ Α

1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 25
2. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 43
3. α→Λ , β→Λ , γ→Σ , δ→Λ , ε→Λ , στ→Λ , ζ→Σ , η→Λ , θ→Λ , ι→Σ
4. α→Β , β→Γ , γ→Δ , δ→Γ , ε→Δ

ΘΕΜΑ Β

1. Είναι $A(-1,2)$ $B(1,4)$ $\Gamma(-3,4)$

α) $\overrightarrow{AB}=(1-(-1),4-2)=(2,2)$

$\overrightarrow{A\Gamma}=(-3-(-1),4-2)=(-2,2)$

β) Για να είναι κορυφές τριγώνου, αρκεί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ να <u>μην</u> είναι παράλληλα.

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-2(-2)=4+4=8\neq 0$$

Άρα τα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα οπότε τα A,B,Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

γ) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

δ) Είναι $(AB)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{8}$ και $(A\Gamma)=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

Αφού $(AB)=(A\Gamma)$ το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ε) Είναι $x_M=\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}=\dfrac{1-3}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$

$$y_M=\frac{y_B+y_\Gamma}{2}=\frac{4+4}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Άρα $M(-1,4)$

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=(-1-(-1),4-2)=(0,2)$

Οπότε $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=2$

στ) Το $\overrightarrow{AM}=(0,2)$ και το $\overrightarrow{MB}=(1-(-1),\,4-4)=(2,0)$

Οπότε $\vec{u}=2\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{MB}=2(0,2)-3(2,0)=(0,4)-(6,0)=(0-6,4-0)=(-6,4)$

2. $\vec{\alpha}=(2,-4)$, $\vec{\beta}=(-3,-2)$, $\vec{\gamma}=(7,-6)$

Πρέπει να ισχύει $\vec{\gamma}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\Rightarrow(7,-6)=\kappa(2,-4)+\lambda(-3,-2)\Rightarrow$

$\Rightarrow(7,-6)=(2\kappa,-4\kappa)+(-3\lambda,-2\lambda)\Rightarrow(7,-6)=(2\kappa-3\lambda,-4\kappa-2\lambda)$

Οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}2\kappa-3\lambda&=7\\-4\kappa-2\lambda&=-6\end{aligned}\right\}\overset{\cdot(2)}{\Rightarrow}\left\{\begin{aligned}\cancel{4\kappa}-6\lambda&=14\\\cancel{-4\kappa}-2\lambda&=-6\end{aligned}\right.\oplus$$

$$-8\lambda=8\Rightarrow\lambda=-1$$

Για $\lambda=-1$ είναι $2\kappa-3(-1)=7\Rightarrow2\kappa+3=7\Rightarrow2\kappa=4\Rightarrow\kappa=2$

Άρα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ Γ

1. Είναι $7\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{\Gamma M}=4\overrightarrow{MA}$

Με σημείο αναφοράς το A έχουμε:

$7\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)+3\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{A\Gamma}\right)=-4\overrightarrow{AM}\Rightarrow7\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{A\Gamma}=-4\overrightarrow{AM}\Rightarrow$

$\Rightarrow7\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{A\Gamma}\cancel{-4\overrightarrow{AM}}=\cancel{-4\overrightarrow{AM}}\Rightarrow7\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{A\Gamma}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\frac{3}{7}\overrightarrow{A\Gamma}$

Οπότε $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}\Rightarrow A,B,\Gamma$ συνευθειακά.

2. $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=3\vec{\alpha}+5\vec{\beta}+3\vec{\gamma}$

Για να είναι το β μέσο του ΑΓ αρκεί να ισχύει:

$\overrightarrow{OB}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}}{2}\Leftrightarrow2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}+3\vec{\alpha}+5\vec{\beta}+3\vec{\gamma}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\dfrac{4\vec{\alpha}+6\vec{\beta}+2\vec{\gamma}}{2}\Leftrightarrow2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\dfrac{\cancel{2}\left(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)}{\cancel{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ ισχύει.

3. $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma E}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{AZ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$

α) $\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Gamma E}-\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=$

$=\frac{1}{2}\vec{\beta}-\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\alpha}=\frac{3}{2}\vec{\beta}-\frac{5}{6}\vec{\alpha}$

$$\overrightarrow{\Delta Z}=\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{A\Delta}=\frac{3}{5}\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\alpha}$$

β) Είναι $\overrightarrow{\Delta Z}=\frac{3}{5}\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\alpha}\Rightarrow\frac{1}{3}\vec{\alpha}=\frac{3}{5}\vec{\beta}-\overrightarrow{\Delta Z}\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}\vec{\alpha}=\frac{9}{5}\vec{\beta}-3\overrightarrow{\Delta Z}$ **(1)**

Είναι

$$\overrightarrow{\Delta E}=\frac{3}{2}\vec{\beta}-\frac{5}{6}\vec{\alpha}\overset{(1)}{\Rightarrow}\overrightarrow{\Delta E}=\frac{3}{2}\vec{\beta}-\frac{5}{6}\left(\frac{9}{5}\vec{\beta}-3\overrightarrow{\Delta Z}\right)\Rightarrow\overrightarrow{\Delta E}=\frac{3}{2}\vec{\beta}-\frac{\cancel{5}}{6}\cdot\frac{9}{\cancel{5}}\vec{\beta}+\frac{15}{6}\overrightarrow{\Delta Z}\Rightarrow\overrightarrow{\Delta E}=\cancel{\frac{3}{2}\vec{\beta}}-\cancel{\frac{3}{2}\vec{\beta}}+\frac{15}{6}\overrightarrow{\Delta Z}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\overrightarrow{\Delta E}=\frac{15}{6}\overrightarrow{\Delta Z}\Rightarrow\overrightarrow{\Delta E}\,//\,\overrightarrow{\Delta Z}$ οπότε Δ, E, Z συνευθειακά.

ΘΕΜΑ Δ

1. Είναι Μ μέσο ΒΓ και ΑΒΓ τρίγωνο.

$$\kappa\overrightarrow{B\Gamma}+\lambda\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{A\Gamma}-7\overrightarrow{AB}\Rightarrow\kappa\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)+\lambda\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=3\overrightarrow{A\Gamma}-7\overrightarrow{AB}$$

$$\overset{\cdot(2)}{\Rightarrow}2\kappa\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)+\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=6\overrightarrow{A\Gamma}-14\overrightarrow{AB}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\kappa\overrightarrow{A\Gamma}-2\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}=6\overrightarrow{A\Gamma}-14\overrightarrow{AB}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AB}+14\overrightarrow{AB}=6\overrightarrow{A\Gamma}-2\kappa\overrightarrow{A\Gamma}-\lambda\overrightarrow{A\Gamma}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-2\kappa+\lambda+14)\overrightarrow{AB}=(6-2\kappa-\lambda)\overrightarrow{A\Gamma}$$

Αν $-2\kappa+\lambda+14\neq 0$ τότε $\overrightarrow{AB}=\frac{6-2\kappa-\lambda}{-2\kappa+\lambda+14}\overrightarrow{A\Gamma}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{A\Gamma}$ άτοπο γιατί είναι πλευρές τριγώνου

Αν $6-2\kappa-\lambda\neq 0$ τότε $\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{-2\kappa+\lambda+14}{6-2\kappa-\lambda}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{A\Gamma}\,//\,\overrightarrow{AB}$ άτοπο γιατί είναι πλευρές τριγώνου

Άρα και $\left.\begin{matrix}-2\kappa+\lambda+14=0\\ 6-2\kappa-\lambda=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}-2\kappa\cancel{+\lambda}=-14\\ -2\kappa\cancel{-\lambda}=-6\end{matrix}\right.\oplus$

$$-4\kappa=-20\Rightarrow\kappa=5$$

Για $\kappa=5$ είναι $-2\cdot 5+\lambda+14=0\Rightarrow -10+\lambda+14=0\Rightarrow\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=-4$

2. Είναι $\vec{\alpha}=\left(3,-2-|\vec{\beta}|\right)$ και $\vec{\beta}=\left(4-|\vec{\alpha}|,\sqrt{3}\right)$

α) $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3^2+\left(-2-|\vec{\beta}|\right)^2}\Rightarrow|\vec{\alpha}|^2=\left(\sqrt{9+\left(-\left(2+|\vec{\beta}|\right)\right)^2}\right)^2\Rightarrow|\vec{\alpha}|^2=9+4+4|\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|^2\Rightarrow$

$\Rightarrow|\vec{\alpha}|^2=13+4|\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|^2$ **(1)**

$|\vec{\beta}|=\sqrt{\left(4-|\vec{\alpha}|\right)^2+\sqrt{3}^2}\Rightarrow|\vec{\beta}|^2=\left(\sqrt{\left(4-|\alpha|\right)^2+3}\right)^2\Rightarrow|\vec{\beta}|^2=16-8|\alpha|+|\vec{\alpha}|^2+3\Rightarrow$

$\Rightarrow|\vec{\beta}|^2=19-8|\alpha|+|\vec{\alpha}|^2$ **(2)**

Προσθέτω τις **(1)** και **(2)** κατά μέλη

$\cancel{|\vec{\alpha}|^2}+\cancel{|\vec{\beta}|^2}=13+4|\vec{\beta}|+\cancel{|\vec{\beta}|^2}+19-8|\vec{\alpha}|+\cancel{|\vec{\alpha}|^2}\Rightarrow 0=32+4|\vec{\beta}|-8|\vec{\alpha}|\Rightarrow 8|\vec{\alpha}|-32=4|\vec{\beta}|\overset{:(4)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 2|\vec{\alpha}|-8=|\vec{\beta}|$ **(3)**

Από **(1)** $\overset{(3)}{\Rightarrow}|\vec{\alpha}|^2=13+4\left(2|\vec{\alpha}|-8\right)+\left(2|\vec{\alpha}|-8\right)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow|\vec{\alpha}|^2=13+8|\vec{\alpha}|-32+4|\vec{\alpha}|^2-32|\vec{\alpha}|+64\Rightarrow$

$\Rightarrow 3|\vec{\alpha}|^2-24|\vec{\alpha}|+45=0\overset{:(3)}{\Rightarrow}|\vec{\alpha}|^2-8|\vec{\alpha}|+15=0$

$\Delta=(-8)^2-4\cdot1\cdot15=64-60=4$

$$|\vec{\alpha}|_{1,2}=\frac{8\pm2}{2}\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{8+2}{2}=\dfrac{10}{2}=5\\[2mm]\dfrac{8-2}{2}=\dfrac{6}{2}=3\end{array}\right.$$

Αν $|\vec{\alpha}|=5$ τότε $(3)\Rightarrow|\vec{\beta}|=2\cdot5-8=10-8=2$

Αν $|\vec{\alpha}|=3$ τότε $(3)\Rightarrow|\vec{\beta}|=2\cdot3-8=6-8=-2$ αδύνατο.

Άρα $|\vec{\alpha}|=5$ και $|\vec{\beta}|=2$ οπότε $\vec{\alpha}=(3,-4)$ και $\vec{\beta}=\left(-1,\sqrt{3}\right)$

β) Το διάνυσμα $\vec{\beta}=\left(-1,\sqrt{3}\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\beta}}=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

Είναι $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{\vec{\beta}}\Rightarrow\varepsilon\varphi\omega=-\sqrt{3}$ (επειδή $\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$) έχουμε $\omega=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$