ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 27 / 11 / 11

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

1) Είναι $συν(-x) = συνx$. **Σ**

2) Ισχύει ότι $ημx + συνx = 1$. **Λ**

3) Ισχύει ότι $-1 \leq εφx \leq 1$. **Λ**

4) Η συνάρτηση $g(x) = ημ\left(\frac{3π}{2}x\right)$ έχει περίοδο $T = \frac{4}{3}$. **Σ**

5) Η συνάρτηση $f(x) = εφx$ έχει πεδίο ορισμού το R . **Λ**

6) Η συνάρτηση $f(x) = ημ2x$ έχει μέγιστο το 2 και ελάχιστο -2 . **Λ**

7) Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού . **Λ**

8) Ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών τους. **Λ**

9) Το άθροισμα των συντελεστών ενός πολυωνύμου ισούται με την αριθμητική του τιμή P(1) . Σ

10) Το πολυώνυμο $P(x) = (3x-4)^{2011} + (2x^2-1)^{2012}$ έχει ρίζα τον αριθμό 1 . **Σ**

Μονάδες 10

Β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ΙΙ ώστε σε κάθε εξίσωση της στήλης Α να αντιστοιχούν οι λύσεις της που βρίσκονται στη στήλη Β .

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $ημx = \frac{1}{2}$	**Α.** $x = 2κπ \pm \frac{2π}{3}, κ \in Z$
2. $συνx = 0$	**Β.** $x = κπ + \frac{π}{3}$, $κ \in Z$
3. $συνx = -\frac{1}{2}$	**Γ.** $x = κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in Z$
4. $εφx = \sqrt{3}$	**Δ.** $x = 2κπ + \frac{π}{6}$, ή $x = 2κπ + \frac{5π}{6}$ $κ \in Z$
5. $εφx = -1$	**Ε.** $x = κπ - \frac{π}{3}$, $κ \in Z$
	ΣΤ. $x = 2κπ + \frac{π}{6}$, ή $x = 2κπ + \frac{7π}{6}$ $κ \in Z$
	Ζ. $x = κπ - \frac{π}{4}$, $κ \in Z$

Πίνακας (ΙΙ)

1.	**Δ**
2.	**Γ**
3.	**Α**
4.	**Β**
5.	**Ζ**

Μονάδες 5

Γ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση :

1. Οι συναρτήσεις $f(x)=3\eta\mu\frac{x}{2}$ και $g(x)=3\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$ έχουν :

Α. ίδια περίοδο Β. ίσα μέγιστα Γ. ίδιο πεδίο ορισμού **Δ. τίποτε από τα παραπάνω**

2. Το πολυώνυμο $P(x)=\left(\lambda^2-5\lambda+6\right)x^4+(2-\lambda)x^2+(2\lambda+4)x-\lambda+3$ είναι σταθερό πολυώνυμο όταν το λ ισούται με :

Α. 2 Β. - 2 Γ. 3 Δ. για κάθε $\lambda\in R$ **Ε. για καμιά τιμή του $\lambda\in \mathbf{R}$**

3. Έστω P(3) = 8 . Αν P(x) είναι μηδενικού βαθμού τότε P(- 3) είναι ίσο με :

Α. 0 Β. - 8 **Γ. 8** Δ. 3 Ε. Δεν έχει τιμή .

4. Το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha-1)x^3+\alpha x^2-\alpha$ είναι ίσο με το πολυώνυμο $Q(x)=(x-1)(x+1)$ για α ίσο με :

Α. 0 Β. - 1 **Γ. 1** Δ. 2 Ε. Δεν έχει τιμή .

5. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x)=\left(x-1\right)^{2012}$ είναι :

Α. 1 Β. - 1 Γ. 0 Δ. 2012

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^o

Α. Να απλοποιήσετε την παράσταση :

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(11\pi+\theta)\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(17\pi+\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2}+\theta\right)}$$

Λύση :

$$\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\varepsilon\varphi(11\pi+\theta)=\varepsilon\varphi(10\pi+\pi+\theta)=\varepsilon\varphi(\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta$$

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{12\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(6\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(17\pi+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(16\pi+\pi+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{18\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(9\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(8\pi+\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\varepsilon\varphi\theta$$

Επομένως
$$\frac{\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(11\pi+\theta)\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(17\pi+\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{-\sigma\upsilon\nu\theta\left(\varepsilon\varphi\theta\right)\left(-\sigma\upsilon\nu\theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\theta\left(-\sigma\upsilon\nu\theta\right)\left(-\varepsilon\varphi\theta\right)}=1$$

Μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε ότι : $2\varepsilon\varphi\theta+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\left(\varepsilon\varphi\theta+1\right)^2$

Λύση :

$$2\varepsilon\varphi\theta+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$(\varepsilon\varphi\theta+1)^2=\left(\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}+1\right)^2=\left(\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2=\left(\frac{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2=\frac{\eta\mu^2\theta+2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{1+2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

Άρα $2\varepsilon\varphi\theta+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=(\varepsilon\varphi\theta+1)^2$

Μονάδες 5

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $(4\eta\mu^2x-1)(2\sigma\upsilon\nu x+1)=0$

Λύση :

$$(4\eta\mu^2x-1)(2\sigma\upsilon\nu x+1)=0 \Leftrightarrow 4\eta\mu^2x-1 \ \text{ ή } \ 2\sigma\upsilon\nu x+1=0 \Leftrightarrow \eta\mu^2x=\frac{1}{4} \ \text{ ή } \ \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2} \ \text{ ή } \ \eta\mu x=-\frac{1}{2} \ \text{ ή } \ \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$$

$$\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6} \\ x=2\kappa\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6} \end{cases},\kappa\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6} \\ x=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6} \end{cases},\kappa\in Z$$

$$\eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{6} \\ x=2\kappa\pi+\pi+\dfrac{\pi}{6} \end{cases},\kappa\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{6} \\ x=2\kappa\pi+\dfrac{7\pi}{6} \end{cases},\kappa\in Z$$

$$\sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},\kappa\in Z$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu^2x-5\sigma\upsilon\nu x=4$

Λύση :

$$2\eta\mu^2x-5\sigma\upsilon\nu x=4 \Leftrightarrow 2(1-\sigma\upsilon\nu^2x)-5\sigma\upsilon\nu x=4 \Leftrightarrow 2-2\sigma\upsilon\nu^2x-5\sigma\upsilon\nu x-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu^2x-5\sigma\upsilon\nu x-2=0$$

Θέτω $\sigma\upsilon\nu x=y$

θα έχουμε $-2y^2-5y-2=0$

$\Delta=25-16=9$ άρα $y_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{-4}=\dfrac{5\pm3}{-4}=-2$ ή $-\dfrac{1}{2}$

Επομένως $\sigma\upsilon\nu x=-2$, αδύνατη ή $\sigma\upsilon\nu x=-\dfrac{1}{2}$........(όπως είδαμε στο Θέμα 2ο Γ.) $x=2\kappa\pi\pm\dfrac{2\pi}{3},\kappa\in Z$

Μονάδες 10

Β. α) Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu x$

Λύση :

$$\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ \qquad ή \\ x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \end{array},\kappa\in Z\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} \\ \qquad ή \\ \cancel{x}+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\cancel{+x} \end{array},\kappa\in Z\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{8}\quad,\ \kappa\in Z \\ \qquad ή \\ 0=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\ ,\ \text{αδύνατη} \end{array}\right.$$

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα $\left[-\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$

Λύση :

$$-\pi\le\kappa\pi+\frac{\pi}{8}\le\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow-\pi-\frac{\pi}{8}\le\kappa\pi\le\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\Leftrightarrow-\frac{9\pi}{8}\le\kappa\pi\le\frac{11\pi}{8}\Leftrightarrow-\frac{9}{8}\le\kappa\le\frac{11}{8}$$

Άρα το $\kappa=-1$ ή 0 ή 1

Για $\kappa=-1$ $\quad x=\kappa\pi+\frac{\pi}{8}$ δηλαδή $x=-\pi+\frac{\pi}{8}=-\frac{7\pi}{8}$

Για $\kappa=0$ $\quad x=\kappa\pi+\frac{\pi}{8}$ δηλαδή $x=\frac{\pi}{8}$

Για $\kappa=1$ $\quad x=\kappa\pi+\frac{\pi}{8}$ δηλαδή $x=\pi+\frac{\pi}{8}=\frac{9\pi}{8}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^o

Α. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\left(\lambda^3-\lambda^2-6\lambda\right)x^3+(\lambda^3-9\lambda)x^2+12-4\lambda$. Να βρεθεί ο βαθμός του για τις διάφορες τιμές του $\lambda\ \in R$.

Λύση :

$\lambda^3-\lambda^2-6\lambda\ne0\Leftrightarrow\lambda\left(\lambda^2-\lambda-6\right)\ne0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-3)(\lambda+2)\ne0\Leftrightarrow\lambda\ne0$ και $\lambda\ne3$ και $\lambda\ne-2$

- Αν $\lambda\ne0$ και $\lambda\ne3$ και $\lambda\ne-2$, θα είναι $3^{ου}$ βαθμού.

- Αν $\lambda = 0$, $P(x) = 12$, δηλαδή θα είναι μηδενικού βαθμού.
- Αν $\lambda = 3$, $P(x) = (3^3 - 27)x^2 + 12 - 12 = 0$, δηλαδή δεν έχει βαθμό .
- Αν $\lambda = -2$, $P(x) = \left[(-2)^3 - 9(-2)\ \right]x^2 + 12 - 4(-2) = 10x^2 + 20$, δηλαδή θα είναι δευτέρου βαθμού .

Μονάδες 7

Β. Το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 2 ενώ η αριθμητική τιμή του P(x) για x = 1 είναι ίση με το 2 .

Έστω επίσης το πολυώνυμο $Q(x) = (2x-3)^{2012} - (P(x)-1)^{2011} + x$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \left(\dfrac{P(2)-P(1)}{2}\right)^{2011}$

Λύση :

Είναι $P(2) = 0$ και $P(1) = 2$

Οπότε $A = \left(\dfrac{P(2)-P(1)}{2}\right)^{2011} = \left(\dfrac{0-2}{2}\right)^{2011} = \left(\dfrac{-2}{2}\right)^{2011} = (-1)^{2011} = -1$

Μονάδες 4

β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του $Q(x)$ για x = 2

Λύση :

$$Q(2) = (2\cdot 2-3)^{2012} - (P(2)-1)^{2011} + 2 = (4-3)^{2012} - (0-1)^{2011} + 2 = 1^{2012} - (-1)^{2011} + 2 = 1+1+2 = 4$$

Μονάδες 4

Γ. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 5\eta\mu\theta\cdot x^2 - 5\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x - 6$, με $\theta \in R$ το οποίο έχει ρίζα το -1

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{7}{5}$

Λύση :

Είναι $P(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + 5\eta\mu\theta\cdot(-1)^2 - 5\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(-1) - 6 = 0 \Rightarrow -1 + 5\eta\mu\theta + 5\sigma\upsilon\nu\theta - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\eta\mu\theta + 5\sigma\upsilon\nu\theta = 7 \overset{:5}{\Rightarrow} \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{7}{5}$

Μονάδες 5

β) Αν η αριθμητική τιμή του P(x) για x = 1 είναι ίση με το – 4 , να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημθ , συνθ και εφθ

Λύση :

Είναι $P(1)=-4 \Rightarrow 1^3+5ημθ\cdot 1^2-5συνθ\cdot 1-6=-4 \Rightarrow -1+5ημθ-5συνθ-6=-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5ημθ-5συνθ=-4+5 \Rightarrow 5ημθ-5συνθ=1$

Έχουμε επίσης από το **(i)** ερώτημα ότι $5ημθ+5συνθ=7$

Οπότε από το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$\begin{array}{l} 5ημθ \cancel{+5συνθ} = 7 \\ 5ημθ \cancel{-5συνθ} = 1 \quad \oplus \\ \hline \end{array}$$

$10ημθ=8 \Rightarrow ημθ=\dfrac{8}{10} \Rightarrow ημθ=\dfrac{4}{5}$

Οπότε $5ημθ+5συνθ=7 \Rightarrow 5\cdot\dfrac{4}{5}+5συνθ=7 \Rightarrow 4+5συνθ=7 \Rightarrow 5ημθ=3 \Rightarrow ημθ=\dfrac{3}{5}$

Είναι $εφθ=\dfrac{ημθ}{συνθ}=\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{4\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}=\dfrac{4}{3}$

Μονάδες 5