

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

- i) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 21
 ii) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 24

B. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ 34

Γ. i) $\rightarrow \Sigma$, ii) $\rightarrow \Lambda$, iii) $\rightarrow \Lambda$, iv) $\rightarrow \Lambda$, v) $\rightarrow \Lambda$, vi) $\rightarrow \Lambda$

ΘΕΜΑ 2^ο

A.

$$1) \text{ Είναι } (2\alpha - \beta)(2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = (2\alpha)^2 - \beta^2 - (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ = 4\alpha^2 - \beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 2\alpha^2 - 3\beta^2$$

$$2) A = \frac{(x^2 - 2x + 1)(x^3 - 9x)}{x^2 - x} = \frac{(x-1)^2 \cdot \cancel{x} \cdot (x^2 - 9)}{\cancel{x} \cdot (x-1)} = (x-1)(x-3)(x+3)$$

$$3) \text{ i) } |0| = 0 \quad \text{ii) } |-\sqrt{2}| = \sqrt{2} \quad \text{iii) } |2\pi - 7| = -(2\pi - 7) = 7 - 2\pi \quad \text{iv) } |3 - \sqrt{10}| = -(3 - \sqrt{10}) = \sqrt{10} - 3$$

B.

i) Επειδή τα εδεχόμενα είναι ανα δύο ασυμβίβαστα , ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος

$$\text{Είναι } P(A \cup B \cup \Gamma) = \frac{7}{8} \Rightarrow P(A) + P(B) + P(\Gamma) = \frac{7}{8} \quad (1)$$

$$\text{Είναι } P(A \cup B) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{3}{8} \quad (2)$$

$$\text{Οπότε από (1) και (2) έχουμε } \frac{3}{8} + P(\Gamma) = \frac{7}{8} \Rightarrow P(\Gamma) = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} \Rightarrow P(\Gamma) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Είναι } P(B \cup \Gamma) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B) + P(\Gamma) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Από την (2) έχουμε } P(A) + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{8}$$

ii)

$$\alpha) P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) \Rightarrow P(A \cup \Gamma) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cup \Gamma) = \frac{5}{8}$$

$$\beta) P(\Gamma - A) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap A) \Rightarrow P(\Gamma - A) = P(\Gamma) \Rightarrow P(\Gamma - A) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \gamma) P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) \Rightarrow P(A' \cup B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B - A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(A' \cup B) = 1 - P(A) + P(B) - (P(B) - P(B \cap A)) \Rightarrow P(A' \cup B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(B \cap A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(A' \cup B) = 1 - \frac{1}{8} \Rightarrow P(A' \cup B) = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Είναι $|3\alpha + \beta| = 5$ και $|3\alpha - \beta| = 4$

$$i) |18\alpha + 6\beta| = |6(3\alpha + \beta)| = |6| \cdot |3\alpha + \beta| = 6 \cdot 5 = 30$$

$$ii) |6\alpha - 2\beta| = |2(3\alpha - \beta)| = |2| \cdot |3\alpha - \beta| = 2 \cdot 4 = 8$$

$$iii) |9\alpha^2 - \beta^2| = |(3\alpha + \beta)(3\alpha - \beta)| = |3\alpha + \beta| \cdot |3\alpha - \beta| = 5 \cdot 4 = 20$$

$$iv) 9\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2 = (3\alpha + \beta)^2 = |3\alpha + \beta|^2 = 5^2 = 25$$

B.

$$\text{Έχουμε } A = \frac{2|x-1|}{x-1} + 3 \frac{|x-3|}{x-3} + |x+2| - x$$

Είναι $1 < x < 3$. Οπότε $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ και $x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0$

Είναι $1 < x < 3 \Rightarrow 1 + 2 < x + 2 < 3 + 2 \Rightarrow 3 < x + 2 < 5$. Άρα $x + 2 > 0$

$$\text{Οπότε } A = \frac{2(x-1)}{x-1} + 3 \frac{-(x-3)}{x-3} + x + 2 - x = 2 + 3 \cdot (-1) + 2 = 4 - 3 = 1$$

Γ.

$$i) |x-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ \text{ή} \\ x-1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+1 \\ \text{ή} \\ x=-2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ \text{ή} \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\text{ii) } ||x|-2|=4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x|-2=4 \\ \text{ή} \\ |x|-2=-4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x|=4+2 \\ \text{ή} \\ |x|=-4+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x|=6 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ \text{ή} \\ x=-6 \end{cases} \\ \text{ή} \\ |x|=-2 \text{ Αδύνατο} \end{array} \right.$$

$$\text{iii) } d(x, -1) < 3 \Rightarrow x \in (-3-1, 3-1) \Rightarrow x \in (-4, 2) \Rightarrow -4 < x < 2$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A.

i) Αν ορίσουμε με $P(2)$ την πιθανότητα να έχει διαβάσει 2 βιβλία τότε είναι $P(2) = \frac{N(2)}{N(\Omega)}$

Το πλήθος των μαθητών που έχουν διαβάσει 2 βιβλία είναι $N(2) = \alpha + 1$

Το πλήθος όλων των μαθητών είναι $N(\Omega) = 2\alpha - 3 + \alpha + 2 + \alpha \cancel{1} + \alpha \cancel{1} + 2\alpha \Rightarrow N(\Omega) = 7\alpha - 1$

$$\text{Οπότε έχουμε } P(2) = \frac{N(2)}{N(\Omega)} \Rightarrow \frac{20}{100} = \frac{\alpha+1}{7\alpha-1} \Rightarrow 20(7\alpha-1) = 100(\alpha+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 140\alpha - 20 = 100\alpha + 100 \Rightarrow 140\alpha - 100\alpha = 100 + 20 \Rightarrow 40\alpha = 120 \Rightarrow \alpha = \frac{120}{40} \Rightarrow \alpha = 3$$

ii)

Το σύνολο όλων των μαθητών είναι $N(\Omega) = 7\alpha - 1 \stackrel{\alpha=3}{\Rightarrow} N(\Omega) = 7 \cdot 3 - 1 \Rightarrow N(\Omega) = 20$

Το πολύ ένα βιβλίο έχουν διαβάσει συνολικά

$$N(A) = 2\alpha - 3 + \alpha + 2 \Rightarrow N(A) = 3\alpha - 1 \stackrel{\alpha=3}{\Rightarrow} N(A) = 3 \cdot 3 - 1 \Rightarrow N(A) = 8 \text{ μαθητές}$$

$$\text{Οπότε } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Τουλάχιστον 3 βιβλία έχουν διαβάσει συνολικά

$$N(B) = \alpha - 1 + 2\alpha \Rightarrow N(B) = 3\alpha - 1 \stackrel{\alpha=3}{\Rightarrow} N(B) = 3 \cdot 3 - 1 \Rightarrow N(B) = 8 \text{ μαθητές}$$

$$\text{Οπότε } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Β.

Είναι $P(B) = 2P(A)$, επίσης $P(A \cap B) = 0,1$ και $P(A \cup B)' = 0,2$

Οπότε $P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)' \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0,2 \Rightarrow P(A \cup B) = 0,8$

$$\alpha) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{P(B)=2P(A)}{\Rightarrow} 0,8 = P(A) + 2P(A) - 0,1 \Rightarrow 0,8 + 0,1 = 3P(A) \Rightarrow \\ \Rightarrow 3P(A) = 0,9 \Rightarrow P(A) = \frac{0,9}{3} \Rightarrow P(A) = 0,3$$

β) Είναι $P(B) = 2P(A) \Rightarrow P(B) = 2 \cdot 0,3 \Rightarrow P(B) = 0,6$

Οπότε για να μην πραγματοποιηθεί το Β θέλουμε $P(B')$

$$P(B') = 1 - P(B) \Rightarrow P(B') = 1 - 0,6 \Rightarrow P(B') = 0,4$$

$$\gamma) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = 0,3 - 0,1 \Rightarrow P(A - B) = 0,2$$

$$\delta) P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ = 0,3 - 0,1 + 0,6 - 0,1 = 0,7$$