ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες.

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to IR$, αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\alpha) - G(\beta).$$

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι $1-1$ αν και μόνον αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη M και μία ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 262,

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 246

Α4. **α)** **Λάθος,**
β) **Σωστό,**
γ) **Λάθος,**
δ) **Σωστό,**
ε) **Σωστό,**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in IR$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΛΥΣΗ:

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$.

- Για $x>0$ έχουμε $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
- Για $x<0$ έχουμε $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)=\dfrac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}$.

Είναι

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}=0 \overset{(x^2+1)^3>0}{\Leftrightarrow} -6x^2+2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow |x|=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}>0 \overset{(x^2+1)^3>0}{\Leftrightarrow} -6x^2+2>0\Leftrightarrow x^2<\frac{1}{3}\Leftrightarrow |x|<\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}>0 \overset{(x^2+1)^3>0}{\Leftrightarrow} -6x^2+2>0\Leftrightarrow x^2>\frac{1}{3}\Leftrightarrow |x|>\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x<-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x>\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα η f κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

Η συνάρτηση έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ δηλαδή στα σημεία

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right) \text{ και } B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right).$$

Β3. Η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες, αφού είναι συνεχής στο IR. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

και ομοίως

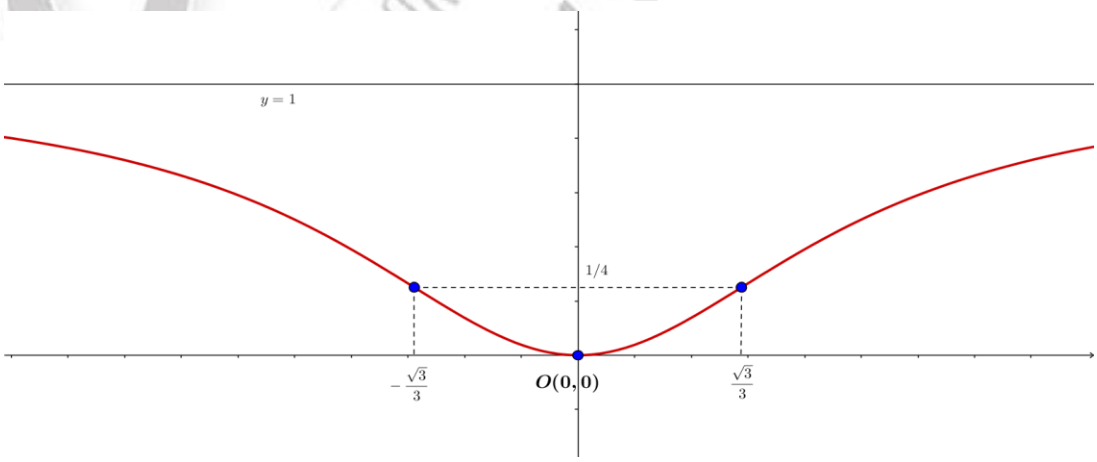
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Β4. Η μονοτονία, τα ακρότατα, η καμπυλότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f’(x)		−		−	0	+		+	
f’’(x)		−	0	+		+	0	−	
f(x)	1	↘	$\frac{1}{4}$	↘		↗	$\frac{1}{4}$	↗	1

Με βάση τα συμπεράσματα των Β1, Β2, Β3, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in IR$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:IR\to IR$ που ικανοποιούν την σχέση

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$$

για κάθε $x\in IR$ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in IR$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3 , να λυθεί η εξίσωση

$$f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f(x+3)-f(x) \quad \text{όταν } x\in[0,+\infty).$$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ:

Γ1. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=2x\left(e^{x^2}-1\right)$.

Είναι $x^2\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}\geq 1\Leftrightarrow e^{x^2}-1\geq 0$ για κάθε $x\in IR$, οπότε

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x<0,\quad f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0 \quad \text{και} \quad f'(x)=0\Leftrightarrow x=0.$$

Αφού είναι συνεχής, η μονοτονία της φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	↘ Ο. ε ↗

Επομένως η f(x) έχει ελάχιστο στο x=0 το f(0) = 0, οπότε

$$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0.

Άρα η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, έχει μοναδική λύση την $x=0$.

Γ2. Επειδή $e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in IR$ η δοσμένη σχέση δίνει ισοδύναμα ότι:

$$|f(x)|=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in IR.$$

Επίσης,

$$f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow (e^{x^2}-x^2-1)^2=0\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1=0\Leftrightarrow x=0.$$

Άρα, η f έχει μοναδική ρίζα το $x=0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτό.

Επομένως η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Έτσι:

- αν $f(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, τότε σε αυτό το διάστημα είναι $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$,
- αν $f(x)<0$ στο $(0,+\infty)$, τότε σε αυτό το διάστημα είναι $f(x)=-e^{x^2}-x^2-1$.

Επειδή, $f(0)=0$, θα είναι:

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\text{ για κάθε } x\in[0,+\infty) \text{ ή } f(x)=-e^{x^2}-x^2-1,\text{ για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

Επίσης, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,0)$ και δεν μηδενίζει σε αυτό.
Επομένως η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$.

Έτσι:

- αν $f(x)>0$ στο $(-\infty,0)$, τότε σε αυτό το διάστημα είναι $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$,
- αν $f(x)<0$ στο $(-\infty,0)$, τότε σε αυτό το διάστημα είναι $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$.

Επειδή, $f(0)=0$, τότε

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\text{ για κάθε } x\in(-\infty,0] \text{ ή } f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\text{ για κάθε } x\in(-\infty,0].$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω,
η f έχει έναν από τους παρακάτω τύπους:

α) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ ή β) $f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1),\ x\in\mathbb{R}$ ή

γ) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & \text{αν } x>0 \\ -(e^{x^2}-x^2-1), & \text{αν } x\le 0 \end{cases}$ ή δ) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & \text{αν } x<0 \\ -(e^{x^2}-x^2-1), & \text{αν } x\ge 0 \end{cases}$

Γ3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR, με

$$f'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$$

και

$$f''(x)=4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}-2=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right).$$

Επειδή $x^2\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^{x^2}\ge 1$.

Επίσης είναι $4x^2e^{x^2}\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $f''(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f''(x)=0$ αν και μόνο αν $x=0$.

Οπότε, αφού η f' είναι συνεχής στο $x=0$, θα είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς η f θα είναι κυρτή.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x)$ ορισμένη στο $[0,+\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$h'(x)=f'(x+3)-f'(x).$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο IR, τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)\subseteq\mathbb{R}$.

Αφού για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $x+3>x$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα έχουμε:

$$f'(x+3)>f'(x)\Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0\Leftrightarrow h'(x)>0.$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και $1-1$.

Η εξίσωση $f(|ημx|+3)-f(|ημx|)=f(x+3)-f(x)$, για $x\in[0,+\infty)$ γράφεται ισοδύναμα :

$$h(|ημx|)=h(x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}|ημx|=x.$$

Ισχύει $|ημx|\le|x|$, για $x\in IR$, με το ίσον να ισχύει μόνο αν $x=0$.

Αν $x\ge 0$ προκύπτει $|ημx|\le x$, με το ίσον να ισχύει μόνο αν $x=0$.

Άρα η αρχική εξίσωση έχει μοναδική λύση τη $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\cdot ημx\,dx=\pi$
- $f(IR)=IR$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ημx}=1$
- $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ για κάθε $x\in IR$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο IR (μονάδες 4)
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημx+συνx}{f(x)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

Δ1. Έχουμε διαδοχικά

$$\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\cdot ημx\,dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi}f(x)\cdot(-συνx)'\,dx+\int_0^{\pi}(f'(x))'\cdot ημx\,dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[-f(x)συνx\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)\cdot συνx\,dx+\left[f'(x)ημx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\cdot συνx\,dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow -f(\pi)συν\pi+f(0)συν0+f'(\pi)ημ\pi-f'(0)ημ0=\pi$$

$$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi.$$

Επίσης, για $x \neq 0$, είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\etaμx}\cdot \etaμx\right) = 1\cdot 0 = 0.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 = 0, (ως παραγωγίσιμη), θα είναι $f(0)=0$, οπότε f(π) = π.

Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\etaμx}\cdot\frac{\etaμx}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1.$$

Άρα $f'(0)=1$.

Δ2.

α) Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in IR$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και το x_0 είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού. Άρα από το θεώρημα Fermat παίρνουμε ότι $f'(x_0)=0$.

Οι συναρτήσεις στα δύο μέλη της δοσμένης σχέσης είναι παραγωγίσιμες (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο IR, οπότε η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο IR (ως σύνθεση παραγωγίσιμων), η $f(f(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο IR (ως σύνθεση παραγωγίσιμων) και η e^x είναι παραγωγίσιμη στο IR) και ίσες συναρτήσεις άρα και οι παράγωγοί τους είναι ίσες. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της δοσμένης σχέσης παίρνουμε :

$$e^{f(x)}f'(x)+1 = f'(f(x))f'(x)+e^x$$

Αυτή για $x = x_0$ δίνει :

$$e^{f(x_0)}f'(x_0)+1 = f'(f(x_0))f'(x_0)+e^{x_0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0,$$

που είναι άτοπο, αφού $f'(x_0)=f'(0)=1\neq 0$. Άρα τελικά η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

β) Αφού η $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in IR$ και η f' είναι συνεχής, από την υπόθεση προκύπτει ότι η f' θα διατηρεί το πρόσημό της στο IR και με

$$f'(0)=1>0 \Rightarrow f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in IR$$

και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Δ3. Αφού η f(x) είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο IR, άρα $f(IR)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ και εφόσον έχει σύνολο τιμών το IR (δεδομένο), επομένως, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}=0$.

Η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές για $x\in(α, +\infty)$, με α > 0, συνεπώς:

$$\left|\frac{\etaμx+συνx}{f(x)}\right| \leq \frac{|\etaμx|+|συνx|}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)} \Rightarrow -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\etaμx+συνx}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Είναι όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{f(x)}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)} = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ημx+συνx}{f(x)}=0.$$

Δ4. Στο ολοκλήρωμα $\int_1^{e^π}\frac{f(\ln x)}{x}dx$ θέτουμε $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$. Επομένως:

$$x=1\Rightarrow u=0 \text{ και } x=e^π\Rightarrow u=π.$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_1^{e^π}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^π f(u)du:\ (1).$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR άρα και στο [0, π] και ισχύει f(0) = 0, f(π) = π, θα είναι

$$0\le u\le π\Rightarrow f(0)\le f(u)\le f(π)\Rightarrow 0\le f(u)\le π$$

Οπότε, ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα, αφού το ίσον δεν ισχύει παντού *

$$0<\int_0^π f(u)du<\int_0^π πdu=π^2\Rightarrow 0<\int_1^{e^π}\frac{f(\ln x)}{x}dx<π^2.$$

$(*)$ Χρησιμοποιήθηκε η πρόταση: Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[α,β]$ με $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[α,β]$ και η συνάρτηση $g-f$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[α,β]$ τότε ισχύει

$$\int_α^β f(x)dx<\int_α^β g(x)dx.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση h ορισμένη στο $[α,β]$ με $h(x)=g(x)-f(x)$.

Τότε η h είναι συνεχής στο $[α,β]$, από τα δεδομένα ισχύει $h(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[α,β]$, και δε μηδενίζεται παντού στο $[α,β]$, οπότε από πρόταση του σχολικού βιβλίου:

$$\int_α^β h(x)dx>0\Leftrightarrow\int_α^β (g(x)-f(x))dx>0\Rightarrow\int_α^β g(x)dx-\int_α^β f(x)dx>0\Rightarrow\int_α^β f(x)dx<\int_α^β g(x)dx.$$