ΘΕΜΑ Α (παλιο συστημα Ημερησια) (λ)'

Α1. Θεωρια σελ 63.

Α2. α) Σ δ) Λ

β) Λ ε) Σ

γ) Λ

Α3. α) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

β) $\int_a^\beta 1\,dx = [x]_a^\beta = \beta - a$

γ) $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

ΘΕΜΑ Β (Παλιό Σύστημα Ημερήσια)

(2)

Β1)

x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$x_i\nu_i$
0	5	5	20	0
1	4	9	16	4
2	7	16	28	14
3	4	20	16	12
4	5	25	20	20
Σύνολα	25	–	100	50

Β2) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{1}^{k} x_i\nu_i}{\nu} = \dfrac{\sum_{1}^{5} x_i\nu_i}{25} = \dfrac{50}{25} = 2$

Β3) Επειδή $\nu = 25$ (περιττό πλήθος παρατηρήσεων) έχουμε:

$$\delta = x_{\frac{25+1}{2}} = x_{\frac{26}{2}} = x_{13} = 2$$

Β4) $s^2 = \dfrac{\sum_{1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\nu_i}{\nu} =$

$$= \frac{(0-2)^2\cdot 5 + (1-2)^2\cdot 4 + (2-2)^2\cdot 7 + (3-2)^2\cdot 4 + (4-2)^2\cdot 5}{25} =$$

$$= \frac{4\cdot 5 + 1\cdot 4 + 0\cdot 7 + 1\cdot 4 + 4\cdot 5}{25} = \frac{20+4+0+4+20}{25} = \frac{48}{25} =$$

$$= 1{,}92$$

ΘΕΜΑ Γ (Παλιό Σύστημα Ημερήσια) (3) / ①

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$

Γ1) $f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 2)' = 3x^2 - 6x - 9$

Γ2) • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1(-3) = 4 + 12 = 16$

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Άρα $f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$

• $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x-3)(x+1) > 0 \Leftrightarrow$

$x < -1$ ή $x > 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Μονοτονία

Η f γν. αύξουσα στο $(-\infty, -1]$

Η f γν. φθίνουσα στο $[-1, 3]$

Η f γν. αύξουσα στο $[3, +\infty)$

Ακρότατα

Η f παρουσιάζει για $x=-1$ τοπικό μέγιστο,

το $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 =$

$= -1 - 3 + 9 + 2 =$

$= 7$

Η f παρουσιάζει για $x=3$ τοπικό ελάχιστο,

το $f(3) = \cancel{3^3} - \cancel{3 \cdot 3^2} - 9 \cdot 3 + 2 = -27 + 2 = -25$

Γ3) $g(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$h(x) = 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$.

• $g(x) = h(x) \Leftrightarrow$

$3x^2 = 6x + 9 \Leftrightarrow$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow$ (από (Γ2))

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 3$

$E = \int_{-1}^{3} |g(x) - h(x)| dx = \int_{-1}^{3} |3x^2 - 6x - 9| dx = \int_{-1}^{3} |f'(x)| dx =$

$= -\int_{-1}^{3} f'(x) dx = -\int_{-1}^{3} (3x^2 - 6x - 9) dx =$

(Παλιό Σύστημα Ηλεκτρικά)

(4) ③

$$= -\left[x^3 - 6\frac{x^2}{2} - 9x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= -\left[x^3 - 3x^2 - 9x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= -\left(\cancel{3^3} - \cancel{3 \cdot 3^2} - 27\right) + \left((-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1)\right) =$$

$$= 27 + (-1 - 3 + 9) =$$

$$= 27 + 5 =$$

$$= 32 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ (Παλιό Σύστημα Ηλεκτρικά) [5]

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-1} & x\in[0,1) \\ ax^2+\beta x & x\in[1,+\infty) \end{cases} \qquad a,\beta\in\mathbb{R}$$

Δ1) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{(1-x^2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$= \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{(1-x)(1+x)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} -\dfrac{\cancel{(x-1)}(1+x)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}$

$= -\lim\limits_{x\to1^-}\left[(1+x)(\sqrt{x}+1)\right] = -2\cdot2 = -4$

Δ2) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(ax^2+\beta x) = a\cdot1^2+\beta\cdot1 = a+\beta$

Δ3) Για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ πρέπει

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) \Rightarrow \boxed{-4 = a+\beta}$

Ακόμη έχουμε $f'(2)=2$

$f'(x) = (ax^2+\beta x)' = 2ax+\beta$

$2a\cdot2+\beta = 2$

$\boxed{4a+\beta = 2}$

Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} a+\beta=-4 \\ 4a+\beta=2 \end{cases} \cdot(-1) \qquad \begin{aligned} -a-\beta &= 4 \\ 4a+\beta &= 2 \quad (+) \\ \hline 3a &= 6 \Rightarrow a=2 \end{aligned}$$

$a+\beta=-4 \Rightarrow 2+\beta=-4$

$\beta=-6$