ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελ. 188

Α2. Απόδειξη σχολικό σελ. 251

Α3. $\alpha \to \Sigma \quad \beta \to \Lambda \quad \gamma \to \Lambda \quad \delta \to \Sigma \quad \varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $3x^2 + \alpha x + 3 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad$ με $\quad -6 < \alpha < 6$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \alpha^2 - 4\cdot 3\cdot 3 = \alpha^2 - 36$

$-6 < \alpha < 6 \Rightarrow |\alpha| < 6 \Rightarrow |\alpha|^2 < 36 \Rightarrow \alpha^2 < 36 \Rightarrow \alpha^2 - 36 < 0$

Άρα Δ<0, άρα έχει δύο μιγαδικές ρίζες:

$$z_{1,2} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{36-\alpha^2}}{2\cdot 3} = \begin{cases} z_1 = -\dfrac{\alpha}{6} + i\dfrac{\sqrt{36-\alpha^2}}{6} \\ z_2 = -\dfrac{\alpha}{6} - i\dfrac{\sqrt{36-\alpha^2}}{6} = \overline{z_1} \end{cases}$$

Έχουμε: $\quad |z_1| = \left| -\dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{\sqrt{36-\alpha^2}}{6} \right| = \sqrt{\dfrac{\alpha^2}{36} + \dfrac{36-\alpha^2}{36}} = \sqrt{\dfrac{36}{36}} = \sqrt{1} = 1$

Όμοια, $|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1| = 1$, άρα σε κάθε περίπτωση είναι $|z| = 1$.

Β2. Έστω $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Rightarrow (z-1)(\overline{z}-1) + (z+1)(\overline{z}+1) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow z\overline{z} \cancel{-z} \cancel{-\overline{z}} + 1 + z\overline{z} \cancel{+z} \cancel{+\overline{z}} + 1 = 4 \Rightarrow 2z\overline{z} + 2 = 4 \Rightarrow 2z\overline{z} = 2 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$

άρα ισχύει από Β1 και γεωμετρικά οι εικόνες του z είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές Α(z), Β(-1,0) και Γ(1,0) (αφού ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα).

Β3. $$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}(z) = -\frac{\alpha}{6} \\ &\text{και}\ \ \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\frac{\alpha}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}, \quad x>0$

- Για κατακόρυφη ασύμπτωτη έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)=-\infty, \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

άρα η x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Για οριζόντια ασύμπτωτη έχουμε:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)=+\infty, \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$$

άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη η C_f.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο [1,e] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

- $f(1)=\ln 1-1=-1<0$
- $f(e)=\ln e-\dfrac{1}{e}=1-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-1}{e}>0$

Άρα, $f(1)f(e)<0$ από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,e)$ ώστε $f(x_0)=0$ (1).

Ακόμη επειδή,

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0, \quad$ για $\quad x>0$, άρα η f $\nearrow$ (2) , οπότε από (1) και (2) η ρίζα είναι μοναδική.

Γ3. Ελέγχουμε το πρόσημο της f στο διάστημα (e,2e). Είναι για κάθε

$$x > e \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(e) \Rightarrow f(x) > \frac{e-1}{e} > 0 \Rightarrow f(x) > 0 .$$

Επομένως,

$$E = \int_e^{2e} |f(x)| dx = \int_e^{2e} f(x)dx = \int_e^{2e} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) dx = \int_e^{2e} \ln x dx + \int_e^{2e} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \int_e^{2e} (x)' \ln x dx - [\ln x]_e^{2e} = [x \ln x]_e^{2e} - \int_e^{2e} x \cdot \frac{1}{x} dx - [\ln x]_e^{2e} =$$

$$= 2e \ln 2e - e \ln e - [x]_e^{2e} - (\ln 2e - \ln e) = 2e \ln 2e \cancel{-e} - 2e \cancel{+e} - \ln 2e + 1 =$$

$$= 2e \ln 2e - \ln 2e - 2e + 1 = \ln 2e(2e-1) + 1 - 2e =$$

$$= -(1-2e)\ln 2e + (1-2e) = (1-2e)(1-\ln 2e) = (1-2e)(\ln e - \ln 2e) =$$

$$= (1-2e)\ln \frac{e}{2e} = (1-2e)\ln \frac{1}{2} = -(1-2e)\ln 2 = (2e-1)\ln 2 \quad \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = 2xe^{-x} - f(x) \Rightarrow f'(x) + f(x) = 2xe^{-x} \overset{\cdot e^x}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 2x \Rightarrow \left(e^x f(x)\right)' = \left(x^2\right)' \Rightarrow e^x f(x) = x^2 + c$$

Για x=1: $ef(1) = 1 + c \overset{f(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}}{\Rightarrow} e \cdot \frac{1}{e} = 1 + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $e^x f(x) = x^2 \overset{:e^x>0}{\Rightarrow} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

Δ2. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2 e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x(2x - x^2)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f′(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f'(x)>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2x-x^2}{e^x}>0 \\ e^x>0 \end{array}\right| \Rightarrow 2x-x^2>0 \Rightarrow -x^2+2x>0$$, άρα πρόσημο τριωνύμου.

Άρα στο $\left(-\infty,0\right]$ η $f\downarrow$, στο $\left[0,2\right]$ η $f\uparrow$ και στο $\left[2,+\infty\right)$ η $f\downarrow$.

Το σύνολο τιμών είναι:

$f(A)=f\left(\left(-\infty,0\right]\right)\cup f\left(\left[0,2\right]\right)\cup f\left(\left[2,+\infty\right)\right)=\left[0,+\infty\right)$, διότι:

- $f\left(\left[0,2\right]\right)\overset{f\uparrow}{=}=\left[f(0),f(2)\right]=\left[0,\dfrac{4}{e^2}\right]$ όπου $f(0)=0,\quad f(2)=\dfrac{4}{e^2}$
- $f\left(\left[2,+\infty\right)\right)\overset{f\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(2)\right]=\left(0,\dfrac{4}{e^2}\right]$

  όπου $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$

- $f\left(\left(-\infty,0\right]\right)\overset{f\downarrow}{=}\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[0,+\infty\right)$ όπου

  $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}\cdot x^2=+\infty$

Δ3. Η εξίσωση γράφεται: $x^2=2e^{x-2}\Rightarrow x^2=2\dfrac{e^x}{e^2}\overset{:e^x}{\Rightarrow}\dfrac{x^2}{e^x}=\dfrac{2}{e^2}\Rightarrow f(x)=\dfrac{2}{e^2}$.

Επειδή το $\frac{2}{e^2} \in f\left([0,2]\right)$ από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0,2\right)$ ώστε $f(x_0) = \frac{2}{e^2}$ κι επειδή η $f\uparrow$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική. (1)

Ακόμη το $\frac{2}{e^2} \in f\left([2,+\infty)\right)$ από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in \left(2,+\infty\right)$ ώστε $f(x_1) = \frac{2}{e^2}$ κι επειδή η $f\downarrow$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική. (2)

Τέλος, το $\frac{2}{e^2} \in f\left((-\infty,0]\right)$ από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in \left(-\infty,0\right)$ ώστε $f(x_2) = \frac{2}{e^2}$ κι επειδή η $f\downarrow$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική. (3)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι η εξίσωση $x^2 = 2e^{x-2}$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

Δ4. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $\left(-1, f(-1)\right)$ είναι:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \quad (1)$$

με $f(-1) = \frac{(-1)^2}{e^{-1}} = e$ και $f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$, οπότε $f'(-1) = \frac{-2-1}{e^{-1}} = -3e$

Άρα, από $(1) \Rightarrow y - e = -3e(x+1) \Rightarrow y - e = -3ex - 3e \Rightarrow y = -3ex - 2e$.

Εφόσον η f είναι κυρτή στο $\left(-\infty, 0\right]$ οποιαδήποτε εφαπτομένη θα βρίσκεται κάτω από την C_f, δηλαδή, $f(x) \geq -3ex - 2e \Rightarrow f(x) + 3ex + 2e \geq 0$, για κάθε $x \leq 0$.