ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1 Απόδειξη σελ. 194

Α2 Ορισμός – Θεωρία σελ. 188

Α3 Ορισμός - Θεωρία σελ. 150

Α4

Α) Λ (σελ. 144)

Β) Σ (σελ. 89)

Γ) Λ (σελ. 225)

Δ) Σ (σελ.332 3^{o} θεώρημα)

Ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow$$
$$|z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow$$
$$(z-4)\cdot(\bar{z}-4) = 4\cdot(z-1)\cdot(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} + 4 \Leftrightarrow$$
$$3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow$$
$$|z|^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$|z| = 2$$

Άρα, ο γ.τ. των M(z) είναι κύκλος με κέντρο το O (0,0) και ρ=2.

$C: x^2 + y^2 = 4$

B2.

$A(z_1), B(z_2) \in C \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| = 2 \Leftrightarrow$

$$\alpha)\begin{cases} |z|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z_1} = \dfrac{4}{z_1} \\ z_1 = \dfrac{4}{\overline{z_1}} \end{cases} \\ |z_2|^2 = 4 \Leftrightarrow z_2\overline{z_2} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z_2} = \dfrac{4}{z_2} \\ z_2 = \dfrac{4}{\overline{z_2}} \end{cases} \end{cases}$$

$$\overline{w} = \overline{\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}} = \frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} =$$

$$\frac{2\cdot\dfrac{4}{z_1}}{\dfrac{4}{z_2}} + \frac{2\cdot\dfrac{4}{z_2}}{\dfrac{4}{z_1}} = \frac{\dfrac{2}{z_1}}{\dfrac{1}{z_2}} + \frac{\dfrac{2}{z_2}}{\dfrac{1}{z_2}} =$$

$$\frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w,\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \ w \in \Re$$

$$\beta) |w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{2z_2}{z_1}\right| = 2\cdot\frac{|z_1|}{|z_2|} + 2\cdot\frac{|z_2|}{|z_1|} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} |w| \le 4 \\ w \in R \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -4 \le w \le 4$$

B3.

$$w = -4 \Leftrightarrow 2z_1^{\ 2} + 2z_2^{\ 2} = -4z_1z_2 \Leftrightarrow$$

$$z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2} + 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$$

Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\text{AB} = |z_1 - z_2| = |z_1 + z_1| = 2|z_1| = 2\cdot 2 = 4$$
$$\text{AΓ} = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1||1-2i| = 2\sqrt{5}$$
$$\text{BΓ} = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1||-1-2i| = 2\sqrt{5}$$

Άρα ΑΓ=ΒΓ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Γ1.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = 0 \\ e^x > 0\,,\ \left(x^2+1\right)^2 \succ 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f(x)	↗		↗

Έχουμε

$f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$ διότι $e^x > 0$, $(x-1)^2 \geq 0$ και $(x^2+1)^2 > 0$ άρα η $f \uparrow$.

$$f\left((-\infty.+\infty)\right) \overset{f\uparrow}{=} (\lim_{x\to-\infty} \text{f}(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \overset{(\frac{0}{+\infty})}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\cdot e^x\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \ , \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Γ2.

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=f(2) \overset{f\uparrow\Rightarrow f_{1-1}}{\Leftrightarrow}$$

Έχουμε $e^{3-x}\cdot(x^2+1)=2 \Leftrightarrow$

$$\frac{e^3}{e^x}\cdot(x^2+1)=2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{e^x}=\frac{2}{e^3} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1}=\frac{e^3}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$

Όμως $\frac{e^3}{2}\in f\left((-\infty,+\infty)\right)$ άρα από το Θ.Ε.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in\mathbb{R}$

ώστε $f(x_o)=\frac{e^3}{2}$ και επειδή η $f\uparrow$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Γ3.

x>0

$$2x\le t\le 4x \Rightarrow t\le 4x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(t)\le f(4x) \Rightarrow f(t)-f(4x)\le 0$$

$$\text{Έστω } h(x)=f(t)-f(4x)$$

Η h συνεχής $[2x,4x]$ και $h(x)\le 0$ η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό άρα

$$\int_{2x}^{4x} h(x)dx<0 \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x}\left(f(t)-f(4x)\right)dt<0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{2x}^{4x} \mathrm{f(t)}dt-\int_{2x}^{4x} \mathrm{f}(4x)dx<0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{2x}^{4x} \mathrm{f(t)}dt< f(4\mathrm{x})\int_{2x}^{4x} dt \Leftrightarrow$$

$$\int_{2x}^{4x} \mathrm{f(t)}dt< f(4\mathrm{x})\left[t\right]_{2x}^{4x} \Leftrightarrow$$

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < (4x-2x)f(4x) \Leftrightarrow$$

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2x\cdot f(4x)$$

Γ4

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\int_{2x}^{4x} f(t)\cdot dt + \frac{1}{x}\cdot(-2f(2x)+4f(4x)) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\int_{2x}^{4x} f(t)\cdot dt + \frac{1}{x^2}\cdot(-2x\cdot f(2x)+2x\cdot f(4x)+2x\cdot f(4x)) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot(\int_{2x}^{4x} f(t)\cdot dt - 2x\cdot f(4x)) + \frac{1}{x^2}\cdot(-2x\cdot f(2x)+2x\cdot f(4x))$$

Όμως,

$$\int_{2x}^{4x} f(t)\cdot dt < 2x\cdot 4f(4x) \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)\cdot dt - 2x\cdot 4f(4x) < 0\\ \displaystyle -\frac{1}{x^2} < 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x^2}\cdot(\int_{2x}^{4x} f(t)\cdot dt - 2x\cdot 4f(4x) > 0$$

$$\text{ακόμη } \frac{1}{x^2} > 0$$

$$2x\cdot f(4x) - 2x\cdot f(2x) = 2x\cdot(f(4x)-f(2x))$$

$$2x < 4x \xrightarrow{f\uparrow} f(2x) < f(4x) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2x)-f(4x) > 0\\ 2x > 0\end{array}\right\}$$

$$2x\cdot(f(2x)-f(4x)) > 0$$

$$\text{Άρα}\quad g'(x) > 0 \Rightarrow g\uparrow \text{ στο } (0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)\cdot dt}{x} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{4f(4x)-2f(2x)}{1} = 4-2=2=g(0)$$

$Άρα\ η\ g\ συνεχής\ και\ στο\ x_0=0$

$Άρα\ η\ g\ παραγωγ.\ και\ γνησίως\ αύξουσα\ στο\ [0,+\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

$f'(x)(e^{f(x)}+e^{-f(x)})=2$

$f(0)=0$

$e^{f(x)}\cdot f'(x)+f'(x)\cdot e^{-f(x)}=2$

$(e^{f(x)}-e^{-f(x)})'=(2x)'$

$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$

$Για\quad x=0 \qquad e^{f(0)}-e^{f(0)}=0+c \Rightarrow c=0$

$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Leftrightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x \Leftrightarrow$

$e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2-1=2xe^{f(x)} \Leftrightarrow$

$(e^{f(x)})^2-2xe^{f(x)}=1 \overset{+x^2}{\Leftrightarrow}$

$(e^{f(x)})^2-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1 \Leftrightarrow$

$$e^{f(x)} - x = \pm\sqrt{x^2+1} \left\langle \begin{array}{l} \text{Αν} \quad e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1} \\ \gamma\iota\alpha\ x = 0 \\ e^{f(0)} - 0 = 1 \\ 1 = 1 \\ \alpha\rho\alpha\ e^{f(x)} = \sqrt{x^2+1} + x \\ f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ \\ \\ \text{Αν} \\ e^{f(x)} - x = -\sqrt{x^2+1} \\ x = 0 \\ e^{f(0)} - 0 = -1 \\ 1 = -1\ \alpha\tau o\pi o \end{array} \right.$$

Δ2.

α)

$$f''(x)=\frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})'$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x)$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0\Rightarrow f\uparrow$$

$$f''(x)=\frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow -x=0\Rightarrow x=0$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	ΣΚ	$\cap$

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma\iota\alpha\ \ x>0\Rightarrow -x<0 \\ \qquad (x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}>0 \end{array}\right] f''(x)<0$$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει Σ.Κ. στο $x_0=0$ με $f(0)=0$

β)

$$E\begin{cases} C_f \\ y=x \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο $\left.\begin{array}{l} O(0,f(0))=(0,0) \\ f'(0)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow y-0=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=x$

Άρα στο [0,1] η f κοίλη οπότε οποιαδήποτε εφαπτομένη βρίσκεται πάνω από C_f

δηλαδή $f(x)\le x$

Οπότε

$$E=\int_0^1 |\mathrm{f(x)-x}|\,\mathrm{dx}=\int_0^1[\mathrm{x}-\ln(\mathrm{x}+\sqrt{x^2+1})]\,\mathrm{dx}=$$

$$=\int_0^1 \mathrm{xdx}=\int_0^1 (\mathrm{x})'\ln(\mathrm{x}+\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{dx}=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\mathrm{x}\ln(\mathrm{x}+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1+\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}-1\cdot\ln(1+\sqrt{2})+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1$$

$$=\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{2}\tau.\mu$$

Δ3.

$$\lim_{x\to0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln|\mathrm{f}(x)|\overset{:f(x)>0}{=}$$

$$\Gamma\iota\alpha\ \ x>0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)>\mathrm{f(0)}\Rightarrow\mathrm{f(x)}>0$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\right]\cdot f(x)\ln f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\right]\cdot\lim_{x\to0^+}f(x)\ln\mathrm{f(x)}\overset{(1),(2)}{=}0\cdot0=0$$

$$\bullet\ \lim_{x\to0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\right]\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{f'(x)}=\frac{0}{1}=0\ (1)\qquad\begin{pmatrix}f(0)=0\\ f'(0)=1\end{pmatrix}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot \ln f(x) = \lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{-t^2}{t} = 0 \;(2)$$

$f(x)=t$

$x\to 0^+$

$t_o = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$

Δ4.

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3} + \frac{8-3\int_0^{x} f^2(t)dt}{x-2} = 0 \;\Rightarrow$$

$$(x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right) + (x-3)\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)dt\right) = 0$$

$$g(x) = (x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right) + (x-3)\cdot\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)dt\right)$$

- Η g συνεχής [2,3] ως πράξεις συνεχών

  $g(2) = 3\int_0^2 f^2(t)dt - 8$

  $g(3) = 1-3\int_0^1 f(t^2)dt$

  $x\ge 0$ $από$ Δ_2 $f(x)\le x$ $άρα$ $για$

  Για κάθε $x>0$ $\left.\begin{matrix} f(x)\le x \\ f(x)>0 \end{matrix}\right| \Rightarrow f^2(x)\le x^2 \Rightarrow \underbrace{f^2(x)-x^2}_{h(x)}\le 0$

  $Άρα$ $η\, h(x)\le 0$ $και\, δεν\, είναι\, παντού\, μηδέν\, στο\, [0,2]\, άρα$

$$\int_0^2 h(x)dx < 0 \;\Rightarrow\; \int_0^2 \left(f^2(x)-x^2\right)dx < 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^2 f^2(x)dx - \int_0^2 x^2 dx < 0 \;\Rightarrow\; \int_0^2 f^2(x)dx < \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$\int_0^2 f^2(x)dx < \frac{8}{3} \;\Rightarrow\; 3\int_0^2 f^2(x)dx - 8 < 0 \;\Rightarrow\; g(2)<0$$

Όμοια

$f(x) \le x \Rightarrow f(x^2) \le x^2 \Rightarrow \underbrace{f(x^2) - x^2}_{h(x)} \le 0$

$x > 0,\ f(x) > 0$

Η h συνεχής και δεν μηδενίζεται παντού στο $[0,1]$ *αρα*

$\int_0^1 h(x)dx < 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x^2)dx - \int_0^1 x^2 dx < 0$

$\int_0^1 f(x^2)dx - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 < 0$

$\int_0^1 f(x^2)dx < \frac{1}{3} \Rightarrow 3\int_0^1 f(x^2)dx < 1$

$3\int_0^1 f(x^2)dx - 1 < 0 \Rightarrow g(3) < 0$

Απο Θ.Β. *υπάρχει ένα τουλάχιστον* $x_0 \in (2,3)$ *ώστε* $g(x_0) = 0$

Επιμέλεια:

Μυλωνίδης Σ., Μαργαριτέλη Ε., Ηλιάδης Κ., Σαμαρά Φ., Ευθυμιάδης Γ., Ζαχαράκης Σ.