ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα: 31
Α2. Ορισμός σελίδα: 22
Α3. Ορισμός σελίδα: 86-87
Α4. α) Λ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \;\acute{\eta}\; 8x^2-6x+1=0^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=1 \;\acute{\eta}\; x=\frac{1}{2} \;\acute{\eta}\; x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \;\acute{\eta}\; x=\frac{1}{2} \;\acute{\eta}\; x=\frac{1}{4}$$

$$^*\Delta=(-6)^2-4\cdot 8\cdot 1=36-32=4>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{6\pm 2}{2\cdot 8}=\frac{6\pm 2}{16}\begin{cases}\dfrac{6+2}{16}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{6-2}{16}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Αφού: $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$

Άρα θα είναι: $P(A)=\frac{1}{3},\ P(A\cap B)=\frac{1}{4},\ P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

Αφού: $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$

Β2.

$$P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-(P(A\cup B)')=$$

$$=1-P(A)-\left[1-P(A\cup B)\right]=1-\frac{1}{3}-1+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

<u>α' τρόπος</u>

$P(\Delta)=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

β' τρόπος

$P(\Delta)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\cup P(A'\cap B')\right]=P(A-B)+P(B-A)+P(A'\cap B')$

$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)+P(A'\cap B')^{*}=$

$\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{9}{12}$

* Από προηγούμενη ισότητα: $P(A'\cap B')=P(A')-P(A'-B')=1-P(A)-\frac{1}{6}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

**Για το $P(B)$ από τον προσθετικό νόμο θα έχουμε:*

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$

$P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)=\frac{6}{12}-\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$

B3.

$P(E)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)\overset{\text{εφόσον } (A-B)\cap(B-A)=\phi}{=}$

$P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)^{*}-2P(A\cap B)=$

$\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-\frac{1}{2}=\frac{4}{3}+\frac{5}{12}-\frac{6}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

B4.

$9x^2-3x-2=0$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 9\cdot(-2)=9+72=81>0$

$x_{1,2}=\frac{3\pm 9}{2\cdot 9}=\frac{3\pm 9}{18}\begin{cases}\frac{12}{18}=\frac{2}{3}\\ -\frac{6}{18},\ \text{απορρίπτεται διότι } P(\Gamma)\geq 0\end{cases}$

Άρα $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$

Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα οπότε θα πρέπει:

$P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)\Leftrightarrow P(B\cup\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{5}{12}+\frac{8}{12}=\frac{13}{12}>1$

που είναι άτοπο, άρα τα Β,Γ *δεν είναι ασυμβίβαστα.*

ΘΕΜΑ Γ

Γ1)

κ=5 κλάσεις

κλάσεις	x_i	v_i	f_i%
[8,10)	9		10
[10,12)	11		10
[12,14)	13		30
[14,16)	15		20
[16,18)	17		30
Σύνολο	-		100

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερος του 10 (δηλ. $X<10$) είναι $f_1\% = 10\% \iff f_1 = 0,10$
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 (δηλ. $X \geq 16$) είναι $f_5\% = 30\% \iff f_5=0,30$
- Είναι $\alpha_3 = 108^o \iff 360f_3 = 108 \iff f_3 = \frac{108}{360} \Rightarrow f_3 = 0,30 \iff f_3\% = 30\%$

- $$\begin{aligned} &\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow \bar{x} = \sum_{1}^{5} x_i f_i \Leftrightarrow \\ &14 = x_i f_i + \ldots + x_5 f_5 \Leftrightarrow \\ &14 = 9 \cdot 0,10 + 11 f_2 + 13 \cdot 0,30 + 15 f_4 + 17 \cdot 0,30 \Leftrightarrow \\ &14 = 0,9 + 11 f_2 + 3,9 + 15 f_4 + 5,1 \Leftrightarrow \\ &11 f_2 + 15 f_4 = 14 - 0,9 - 3,9 - 5,1 \Leftrightarrow \\ &11 f_2 + 15 f_4 = 4,1 \qquad (1) \end{aligned}$$

- Ισχύει : $$\begin{aligned} &f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow \\ &0,10 + f_2 + 0,30 + f_4 + 0,30 = 1 \Leftrightarrow \\ &f_2 + f_4 = 0,30 \Leftrightarrow \\ &f_2 = 0,30 - f_4 \qquad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2)

$$\begin{aligned} &\overset{(2)}{\Rightarrow} 11 f_2 + 15 f_4 = 4,1 \Rightarrow \\ &11(0,30 - f_4) + 15 f_4 = 4,1 \Rightarrow \\ &3,3 - 11 f_4 + 15 f_4 = 4,1 \Rightarrow \\ &4 f_4 = 0,8 \Leftrightarrow \\ &f_4 = 0,20 \Leftrightarrow \\ &f_4\% = 20\% \end{aligned}$$

Από (2) έχουμε :

$$\begin{aligned} &f_2 = 0,30 - 0,20 \Leftrightarrow \\ &f_2 = 0,10 \Leftrightarrow \\ &f_2\% = 10\% \end{aligned}$$

Οπότε:

$f_1\% = 10\%$
$f_2\% = 10\%$
$f_3\% = 30\%$
$f_4\% = 20\%$
$f_5\% = 30\%$

Γ2)

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_1^5 (x_i - \bar{x})^2 \nu_i = \sum_1^5 (x_i - \bar{x})^2 \frac{\nu_i}{\nu} \Rightarrow$$

$$s^2 = \sum_1^5 (x_i - \bar{x})^2 f_i =$$

$$= (9-14)^2 \cdot 0,10 + (11-14)^2 \cdot 0,10 + (13-14)^2 \cdot 0,30 + (15-14)^2 \cdot 0,20 + (17-14)^2 \cdot 0.30 =$$

$$= 25 \cdot 0,10 + 9 \cdot 0,10 + 1 \cdot 0,30 + 1 \cdot 0,20 + 9 \cdot 0,30 =$$

$$= 2,5 + 0,9 + 0,3 + 0,2 + 2,7 =$$

$$= 6,6$$

$\textit{Οπότε}\ s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6,6} \simeq 2,57$

$\textit{Άρα}\quad CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\% = \frac{2,57}{14} \cdot 100\% \simeq 18,3\% > 10\%$

Οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Γ3)

Είναι $\sum_1^4 x_i \nu_i = 1780$

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^5 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{\sum_1^4 x_i \nu_i + x_5 \nu_5}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780 + 17 \cdot \nu_5}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780}{\nu} + 17\frac{\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780}{\nu} + 17 f_5 \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780}{\nu} + 17 \cdot 0,30 \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780}{\nu} + 5,1 \Leftrightarrow$$

$$8,9 = \frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\nu = \frac{1780}{8,9} \Leftrightarrow$$

$$\nu = 200$$

Γ4)

$a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4 \neq a_5$

$\beta_i = \dfrac{a_i - \bar{a}}{S_a} \quad i = 1,....,5$

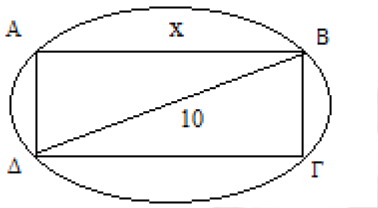
$\bar{a} = \dfrac{\sum_1^5 a_i}{5} \Rightarrow \sum_1^5 a_i = 5 \cdot \bar{a} \ (1)$

$$\bar{\beta} = \frac{\sum_1^5 \beta_i}{5} = \frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5}{5} = \frac{\frac{a_1-\bar{a}}{S_a}+\frac{a_2-\bar{a}}{S_a}+\frac{a_3-\bar{a}}{S_a}+\frac{a_4-\bar{a}}{S_a}+\frac{a_5-\bar{a}}{S_a}}{5} = \frac{\sum_1^5 (a_i-\bar{a})}{5\cdot S_a} = \frac{\sum_1^5 a_i - \sum_1^5 \bar{a}}{5\cdot S_a} \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{5\cdot\bar{a} - 5\cdot\bar{a}}{5S_a} = 0$$

$$S_\beta^{\ 2} = \frac{1}{5}\cdot\sum_1^5 \left(\beta_i - \bar{\beta}\right)^2 = \frac{1}{5}\cdot\sum_1^5 (\beta_i - 0)^2 = \frac{1}{5}\cdot\sum_1^5 \beta_i^{\ 2} = \frac{1}{5}\cdot\sum_1^5 \left(\frac{a_i-\bar{a}}{S_a}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\cdot\sum_1^5 \left(a_i-\bar{a}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{S_a^{\ 2}} = S_a^{\ 2}\cdot\frac{1}{S_a^{\ 2}} = 1$$

ΘΕΜΑ Δ
Δ1)



(0,ρ) ρ=5

Από το σχήμα έχουμε ότι το τρίγωνο $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta$ είναι ορθογώνιο, άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει:

$(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A}\Delta)^2 = (\mathrm{B}\Delta)^2$

$x^2 + (\mathrm{A}\Delta)^2 = 10^2$

$(\mathrm{A}\Delta)^2 = 100 - x^2 \Rightarrow (\mathrm{A}\Delta) = \sqrt{100 - x^2}$

Άρα,

$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{A}\Delta) = x\cdot\sqrt{100-x^2} = f(x)$

$100 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 100 \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} |x| < 10 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 < x < 10$

Δ2)

$f(x) = x\cdot\sqrt{100-x^2}, 0<x<10$

$f'(x) = \sqrt{100-x^2} + x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{100-x^2}}\cdot(-2\cdot x) = \frac{\sqrt{100-x^2}}{1} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{100-x^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{100-2\cdot x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 100-2\cdot x^2 = 0 \Rightarrow 2\cdot x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50}, x>0$

Άρα, $x = 5\cdot\sqrt{2}$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Ο.Μ	$\searrow$	

$f'(x)>0 \Rightarrow 100-2\cdot x^2>0$

$2\cdot x^2<100$

$x^2<50$

$0<x<5\cdot\sqrt{2}$

Άρα για $x=5\cdot\sqrt{2}$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Για $x=5\cdot\sqrt{2}$ προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{aligned}(AB) &= 5\cdot\sqrt{2}\\ (A\Delta) &= \sqrt{100-x^2} = \sqrt{100-50} = \sqrt{50} = 5\cdot\sqrt{2}\end{aligned}\right\}(AB) = (A\Delta)$$

Άρα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ γίνεται τετράγωνο.

Δ3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{98x} = \frac{1}{98}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \frac{1}{98}f'(1) = \frac{1}{98}\cdot\frac{98\sqrt{99}}{99} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Όπου για $x=1$ $f(1) = 1\cdot\left(\sqrt{100-1}\right) = \sqrt{99}$

Όμως $f'(x) = \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

Για $x=1$ $f'(1) = \frac{98}{\sqrt{99}}\ \frac{98\cdot\sqrt{99}}{99}$ (1)

Δ4.

Εφόσον

$P(A-B)\succ 0 \Rightarrow P(A)-P(A\cap B)\succ 0$

$P(A)\succ P(A\cap B)$

Άρα

$A-B\subseteq A \Rightarrow P(A-B)\le P(A) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(P(A-B)\right)\le f\left(P(A)\right) \Rightarrow P(A-B)\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)}\le P(A)\cdot\sqrt{100-P^2(A)}$

$0<P(A-B)\le P(A)\le 1<5\sqrt{2}$

$$\underset{:\left(\sqrt{100-P^2(A)}\right)\succ 0}{\overset{:\left(\sqrt{100-P^2(A-B)}\right)\succ 0}{\Longrightarrow}} \quad \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\prec 1 \quad \underset{**}{\overset{f\uparrow}{\Longrightarrow}}$$

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

**

•Θ.Δ.Ο $\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\prec 1$

$\dfrac{P^2(A-B)}{100-P^2(A)}\prec 1 \Leftrightarrow P^2(A-B)\prec 100-P^2(A) \Leftrightarrow P^2(A-B)+P^2(A)\prec 100$ Ισχύει

$$\left.\begin{array}{l}0<P^2(A)\le 1\\ 0<P^2(A-B)\le 1\end{array}\right\} 0<P^2(A)+P^2(A-B)\le 2$$

•Θ.Δ.Ο. $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\prec 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{P^2(A)}{100-P^2(A-B)}\prec 1 \Leftrightarrow P^2(A)\prec 100-P^2(A-B) \Leftrightarrow P^2(A)+P^2(A-B)\prec 100$ Ισχύει

Επιμέλεια:
Μυλωνίδης Σ. , Μαργαριτέλη Ε. , Ηλιάδης Κ. , Σαμαρά Φ. , Ευθυμιάδης Γ. , Ζαχαράκης Σ.