

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**  
**ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΙΟΥ 2015**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$ ,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε ισχύει πάντοτε ότι  $f \circ g = g \circ f$ .
- β)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών  $\alpha + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ'ΕΣΠΕΡΙΩΝ

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $(\sin x)' = \eta \mu x$ .

δ) Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει ότι  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ .

ε) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 4| = 2|z - 1|.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 2$ .

**Μονάδες 7**

**B2.** Έστω  $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$ , όπου  $z_1, z_2$  δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος

B1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο  $w$  είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β)  $-4 \leq w \leq 4$ .

(μονάδες 7)

**Μονάδες 11**

**B3.** Αν  $w = -4$ , όπου  $w$  είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος B2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τις εικόνες  $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$  των μιγαδικών αριθμών  $z_1, z_2$  και  $z_3$ , με  $z_3 = 2iz_1$ , είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 5**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ2. Να αποδείξετε ότι  $f(f(x)) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}.$$

**Μονάδες 6**

Γ4. Να βρείτε τις εξισώσεις όλων των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της  $f$  που διέρχονται από το σημείο  $(3,0)$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι

$$xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} - x \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

**Μονάδες 6**

Δ2. Να υπολογίσετε την παράγωγο  $f'(x)$  της συνάρτησης  $f$  για κάθε  $x \neq 0$ .

**Μονάδες 6**

Δ3. Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει στο  $+\infty$  οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία  $y = -1$ .

**Μονάδες 6**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**