ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1 Απόδειξη σελ. 194

Α2 Ορισμός – Θεωρία σελ. 188

Α3 Ορισμός - Θεωρία σελ. 150

Α4)

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow$

$|z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow$

$(z-4)\cdot(\bar{z}-4) = 4\cdot(z-1)\cdot(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$

$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow$

$$z\bar{z}+16=4z\bar{z}+4 \Leftrightarrow$$
$$3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z}=4 \Leftrightarrow$$
$$|z|^2=4 \Leftrightarrow$$
$$|z|=2$$

Άρα, ο γ.τ. των M(z) είναι κύκλος με κέντρο το O (0,0) και ρ=2.

$$\mathrm{C}: x^2+y^2=4$$

B2.

$$A(z_1), B(z_2)\in C \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|=2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha)\begin{cases} |z|^2=4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=4 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}_1=\dfrac{4}{z_1} \\ z_1=\dfrac{4}{\bar{z}_1} \end{cases} \\ |z_2|^2=4 \Leftrightarrow z_2\bar{z}_2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}_2=\dfrac{4}{z_2} \\ z_2=\dfrac{4}{\bar{z}_2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\bar{w}=\overline{\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}}=\frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=$$

$$\frac{2\cdot\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{2\cdot\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=\frac{\frac{2}{z_1}}{\frac{1}{z_2}}+\frac{\frac{2}{z_2}}{\frac{1}{z_2}}=$$

$$\frac{2z_2}{z_1}+\frac{2z_1}{z_2}=w,\ w\in R$$

$$\beta)\,|w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le\left|\frac{2z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{2z_2}{z_1}\right|=2\cdot\frac{|z_1|}{|z_2|}+2\cdot\frac{|z_2|}{|z_1|}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}|w|\le 4\\ w\in R\end{array}\right\}\Leftrightarrow -4\le w\le 4$$

Β3.

$$w=-4 \Leftrightarrow 2z_1^{\ 2}+2z_2^{\ 2}=-4z_1z_2 \Leftrightarrow$$
$$z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_1=-z_2$$

Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\mathrm{AB}=|z_1-z_2|=|z_1+z_1|=2|z_1|=2\cdot 2=4$$
$$\mathrm{A\Gamma}=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1||1-2i|=2\sqrt{5}$$
$$\mathrm{B\Gamma}=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|z_1||-1-2i|=2\sqrt{5}$$

Άρα ΑΓ=ΒΓ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)}=\frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$O\mu\omega\varsigma\ f'(x)=0 \Leftrightarrow -x=0 \Rightarrow x=0$$

$A\rho\alpha$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	Ο.Μ	↘

$$E\sigma\tau\omega \qquad \mathrm{A}_1=(-\infty,0\ ]\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A}_2=[0,+\infty)$$

$$f(A_1)=f((-\infty,0\ ])\overset{f\uparrow}{=}(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)\ ]=(0,1]$$

$$f(\mathrm{A}_2)=f([0,+\infty))\overset{f\downarrow}{=}(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(0)\ ]=(0,1]$$

$$f(0)=1, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$A\rho\alpha\ \ f(A)=f(\mathrm{A}_1)\cup f(\mathrm{A}_2)=(0,1]$$

Γ2.

F(A)=(0,1]

$$0 < f(x) \le 1 \overset{f\ \sigma\tau o [0,1] \gamma\nu\eta\sigma.\varphi\theta\iota\nu.}{\Rightarrow}$$

$$f(f(x)) \ge f(1)$$

$$f(f(x)) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Γ3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{1+x-1} = f'(1) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

Γ4.

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \ \varepsilon_1 : \mathrm{y} - f(x_0) = \mathrm{f}'(x_0)(\mathrm{x} - x_0)$ *όλες οι εφαπτόμενες της συνάρτησης f*

όπου $M(x_0, f(x_0))$ *το σημείο επαφής*

$$A(3,0) \in \varepsilon_1 \Rightarrow 0 - f(x_0) = f'(x_0)(3 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f(x_0) = f'(x_0)(3 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{x_o^2+1}} = -\frac{x_o}{(x_o^2+1)\sqrt{(x_o^2+1)}}(3 - x_o) \overset{\cdot\sqrt{x_o^2+1}}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{x_o(3 - x_o)}{x_o^2+1} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_o^2 + 1 = 3x_o - x_o^2$$

$$2x_o^2 - 3x_o + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_o = 1 \\ \acute{\eta} \\ x_o = 1/2 \end{cases}$$

- $\Gamma\iota\alpha\ x_o = 1 \acute{\varepsilon}\chi\omega$
  $\varepsilon: \mathrm{y} - \mathrm{f}(1) = \mathrm{f}'(1)(x-1) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \varepsilon: y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

- $\Gamma\iota\alpha\ \ x_o = \frac{1}{2}\ \ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$
  $\varepsilon: y - f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \varepsilon: y - \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{25}(x-\frac{1}{2})$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \quad , x \neq 0$$

$$xf(\mathrm{x}) = 1 - \sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x\neq 0}{\Rightarrow}$$

Άρα

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - \frac{x^2\eta\mu(\frac{1}{x})}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu(\frac{1}{x}) \qquad , \mathrm{x} \neq 0$$

Όμως πρέπει η f συνεχής στο x=0, άρα

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu(\frac{1}{x})\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right) - \lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu(\frac{1}{x})\right) \overset{(1),(2)}{=} 0 - 0 = 0$$

$$\bullet \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right) = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 0$$

$$\bullet |\eta\mu\frac{1}{x}| \leq 1 \overset{\cdot|x|}{\Rightarrow} |x||\eta\mu\frac{1}{x}| \leq |x| \Rightarrow |\mathrm{x}\,\eta\mu\frac{1}{x}| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq \mathrm{x}\,\eta\mu\frac{1}{x} \leq |x|$$

$\lim\limits_{x\to 0}|\,x\,| = \lim\limits_{x\to 0}\left(-|\,x\,|\right) = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$ (2)

οπότε $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu(\dfrac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Δ2.

$$f'(x) = \frac{\eta\mu x\cdot x-(1-\sigma\upsilon\nu x)}{x^2} - \eta\mu\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} =$$
$$= \frac{x\eta\mu x - 1 + \sigma\upsilon\nu x}{x^2} - \eta\mu\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$$

Δ3.

Αρκεί ν.δ.ο $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$

Όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right) - \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = 0-1=-1$$

• $-1 \le \sigma\upsilon\nu\, x \le 1 \Rightarrow -1 \le -\sigma\upsilon\nu x \le 1 \Rightarrow 0 \le 1-\sigma\upsilon\nu x \le 2 \overset{:x>0}{\Rightarrow}$

$0 \le \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \dfrac{2}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} = 0$ *άρα από κριτήριο παρεμβολής* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\eta\mu t}{t} = 1$ *όπου* $\dfrac{1}{x} = t,\ x\to+\infty,\ t\to 0$

Δ4.

Από Δ3 έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1 < 0$ άρα σε μια περιοχή κοντά στο $+\infty$ υπάρχει α ώστε f(α)<0

και

$$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\pi}\right)}{\frac{1}{\pi}} - \frac{1}{\pi}\eta\mu\pi = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\pi}\right)}{\left(\frac{1}{\pi}\right)} > 0$$

$$-1 < -\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi} < 1 \Rightarrow 0 < 1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi} < 2$$

Άρα έχω:

$$\left.\begin{array}{l} \text{f } \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ [\frac{1}{\pi},a] \subseteq [\frac{1}{\pi},+\infty) \\ \omega\varsigma\ \pi\rho\acute{\alpha}\xi\varepsilon\iota\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu \\ f\left(\frac{1}{\pi}\right)\cdot f(\alpha) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\pi\acute{o}\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ Bolzano\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha$$

$$\tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu\ \exists x_o \in (\frac{1}{\pi},\alpha) \subseteq [\frac{1}{\pi},+\infty)\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(x_o)=0$$

Επιμέλεια:

Μυλωνίδης Σ., Μαργαριτέλη Ε., Ηλιάδης Κ., Σαμαρά Φ., Ευθυμιάδης Γ., Ζαχαράκης Σ.