ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα: 31

Α2. Ορισμός σελίδα: 22

Α3. Ορισμός σελίδα: 86-87

Α4. α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1

- $f(x) = x^3 - 3x + 4$
  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗	ΤΜ	↘	ΤΕ	↗	

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = -1 + 3 + 4 = 6$
$f(1) = 1 - 3 \cdot 1 + 4 = 2$

- στο x_0 = -1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f(-1) = 6
- στο x_0 = 1 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f(1) = 2

B2

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}3(x+1)=3(1+1)=6$$

B3

Η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f απο σημείο (2,f(2)) έχεο μορφή:

$$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)\cdot(\mathrm{x}-2)\ \acute{\eta}\ \ \varepsilon: \mathrm{y}=\lambda x+\beta\ (1)$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ \lambda=f'(2)=9$$

$$f(2)=2^3-3\cdot 2+4=8-6+4=6$$

$$f'(2)=3\cdot 2^2-3=3\cdot 4-3=9$$

$$A\pi\acute{o}\ (1)\Rightarrow \varepsilon: y=9x+\beta$$

$$\acute{o}\mu\omega\varsigma (2,6)\in\varepsilon: 6=9\cdot 2+\beta\Rightarrow \beta=6-18\Rightarrow \beta=-12$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\ \ \varepsilon: y=9x-12$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1)

κ=5 κλάσεις

κλάσεις	x_i	v_i	f_i%
[8,10)	9		10
[10,12)	11		10
[12,14)	13		30
[14,16)	15		20
[16,18)	17		30
Σύνολο	-		100

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερος του 10 (δηλ. X<10) είναι f_1% = 10% <=> f_1 = 0,10

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 (δηλ. $X \geq 16$) είναι $f_5\% = 30\%$ <=> $f_5 = 0{,}30$

- Είναι $\alpha_3 = 108^o$ <=> $360 f_3 = 108$ <=> $f_3 = \frac{108}{360}$ => $f_3 = 0{,}30$ <=> $f_3\% = 30\%$

- $$\bar{x} = \frac{\sum_1^5 x_i \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow \bar{x} = \sum_1^5 x_i f_i \Leftrightarrow$$
$$14 = x_i f_i + \ldots + x_5 f_5 \Leftrightarrow$$
$$14 = 9 \cdot 0{,}10 + 11 f_2 + 13 \cdot 0{,}30 + 15 f_4 + 17 \cdot 0{,}30 \Leftrightarrow$$
$$14 = 0{,}9 + 11 f_2 + 3{,}9 + 15 f_4 + 5{,}1 \Leftrightarrow$$
$$11 f_2 + 15 f_4 = 14 - 0{,}9 - 3{,}9 - 5{,}1 \Leftrightarrow$$
$$11 f_2 + 15 f_4 = 4{,}1 \qquad (1)$$

- Ισχύει :
$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow$$
$$0{,}10 + f_2 + 0{,}30 + f_4 + 0{,}30 = 1 \Leftrightarrow$$
$$f_2 + f_4 = 0{,}30 \Leftrightarrow$$
$$f_2 = 0{,}30 - f_4 \qquad (2)$$

Από (1) και (2)

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} 11 f_2 + 15 f_4 = 4{,}1 \Rightarrow$$
$$11(0{,}30 - f_4) + 15 f_4 = 4{,}1 \Rightarrow$$
$$3{,}3 - 11 f_4 + 15 f_4 = 4{,}1 \Rightarrow$$
$$4 f_4 = 0{,}8 \Leftrightarrow$$
$$f_4 = 0{,}20 \Leftrightarrow$$
$$f_4\% = 20\%$$

Από (2) έχουμε :

$$f_2 = 0{,}30 - 0{,}20 \Leftrightarrow$$
$$f_2 = 0{,}10 \Leftrightarrow$$
$$f_2\% = 10\%$$

Οπότε:

$f_1\% = 10\%$
$f_2\% = 10\%$
$f_3\% = 30\%$
$f_4\% = 20\%$
$f_5\% = 30\%$

Γ2)

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_1^5 (x_i - \bar{x})^2 \nu_i = \sum_1^5 (x_i - \bar{x})^2 \frac{\nu_i}{\nu} \Rightarrow$$

$$s^2 = \sum_1^5 (x_i - \bar{x})^2 f_i =$$

$$= (9-14)^2 \cdot 0{,}10 + (11-14)^2 \cdot 0{,}10 + (13-14)^2 \cdot 0{,}30 + (15-14)^2 \cdot 0{,}20 + (17-14)^2 \cdot 0.30 =$$

$$= 25 \cdot 0{,}10 + 9 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 0{,}30 + 1 \cdot 0{,}20 + 9 \cdot 0{,}30 =$$

$$= 2{,}5 + 0{,}9 + 0{,}3 + 0{,}2 + 2{,}7 =$$

$$= 6{,}6$$

$$\text{Οπότε } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6{,}6} \simeq 2{,}57$$

$$\text{Άρα} \quad CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\% = \frac{2{,}57}{14} \cdot 100\% \simeq 18{,}3\% > 10\%$$

Οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Γ3)

Είναι $\sum_1^4 x_i \nu_i = 1780$

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^5 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{\sum_1^4 x_i \nu_i + x_5 \nu_5}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780 + 17 \cdot \nu_5}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + 17\frac{\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow$$

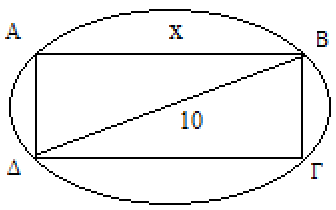
$$14 = \frac{1780}{\nu} + 17 f_5 \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + 17 \cdot 0{,}30 \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780}{\nu} + 5{,}1 \Leftrightarrow 8{,}9 = \frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\nu = \frac{1780}{8{,}9} \Leftrightarrow \nu = 200$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1)



(0,ρ) ρ=5

Από το σχήμα έχουμε ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}}$ είναι ορθογώνιο, άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει:

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Delta})^2=(\mathrm{B\Delta})^2$$
$$x^2+(\mathrm{A\Delta})^2=10^2$$
$$(\mathrm{A\Delta})^2=100-x^2\Rightarrow(\mathrm{A\Delta})=\sqrt{100-x^2}$$

Άρα,

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{A\Delta})=x\cdot\sqrt{100-x^2}=f(x)$$
$$100-x^2>0\Rightarrow x^2<100\Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l}|x|<10\\ x>0\end{array}\right\}\Rightarrow 0<x<10$$

Δ2)

$$f(x)=x\cdot\sqrt{100-x^2},0<x<10$$

$$f'(x)=\sqrt{100-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{100-x^2}}\cdot(-2\cdot x)=\frac{\sqrt{100-x^2}}{1}-\frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-x^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-2\cdot x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 100-2\cdot x^2=0\Rightarrow 2\cdot x^2=100\Rightarrow x^2=50\Rightarrow x=\pm\sqrt{50},x>0$$

Άρα, $x=5\cdot\sqrt{2}$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	Ο.Μ	↘	

$$f'(x)>0\Rightarrow 100-2\cdot x^2>0$$
$$2\cdot x^2<100$$
$$x^2<50$$
$$0<x<5\cdot\sqrt{2}$$

Άρα για $x=5\cdot\sqrt{2}$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Για $x=5\cdot\sqrt{2}$ προκύπτει ότι:

$$\left.\begin{array}{l}(AB)=5\cdot\sqrt{2}\\ (\mathrm{A}\Delta)=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}=5\cdot\sqrt{2}\end{array}\right\}(\mathrm{AB})=(\mathrm{A}\Delta)$$

Άρα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ γίνεται τετράγωνο.

Δ3.

$\textit{Έστω}\ g(x)=y=\kappa\cdot x+\lambda\ \mu\varepsilon\ \kappa,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Εφόσον η ευθεία εφάπτεται στο σημείο (6, f(6)) ισχύει ότι:

$$\kappa=f'(6)\quad \kappa\alpha\iota\quad f(6)=g(6)$$

$$f'(x)=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$f'(6)=\frac{100-2\cdot6^2}{\sqrt{100-36}}=\frac{100-72}{\sqrt{64}}=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}=\kappa$$

$$f(6)=g(6)\Rightarrow 6\cdot\sqrt{100-36}=6\kappa+\lambda\overset{\kappa=\frac{7}{2}}{\Rightarrow}6\cdot\sqrt{64}=6\cdot\frac{7}{2}+\lambda\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot8=21+\lambda\Rightarrow 48=21+\lambda\Rightarrow\lambda=27$$

$$\text{Ε}\textit{πομένως}\quad y=\frac{7}{2}x+27$$

Δ4.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{98x}=\frac{1}{98}\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{1}{98}f'(1)=\frac{1}{98}\cdot\frac{98\sqrt{99}}{99}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$

Όπου για $x=1\quad f(1)=1\cdot\left(\sqrt{100-1}\right)=\sqrt{99}$

Όμως $f'(x)=\dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

Για $x=1\quad f'(1)=\dfrac{98}{\sqrt{99}}\dfrac{98\cdot\sqrt{99}}{99}\quad(1)$

Επιμέλεια:

Μυλωνίδης Σ. , Μαργαριτέλη Ε. , Ηλιάδης Κ. , Σαμαρά Φ. , Ευθυμιάδης Γ. , Ζαχαράκης Σ.