ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ251

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ273

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ150

Α4.

(α) Λ

(β) Σ

(γ) Σ

(δ) Σ

(ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0$

Β1.
Θέτουμε όπου $z=x+yi$
Τότε $2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0 \Leftrightarrow$
$2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow$
$(2x^2+2y^2-4)+2(x-1)i=0 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2+2y^2-4=0 \\ 2(x-1)=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+y^2=2 \\ x=1 \end{array}\right| \Rightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$$

Άρα, οι λύσεις είναι $\begin{array}{ccc} (x,y)=(1,1) & ή & (x,y)=(1,-1) \\ z_1=1+i & & z_2=1-i \end{array}$

Β2.

Είναι $w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^{39}=$

$=3\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{39}=3\left(\frac{2i}{2}\right)^{39}=$

$=3i^{39}=3i^{4\cdot 9+3}=3\left(i^4\right)^9\cdot i^3=3\cdot 1^9\cdot i^3=3i^3=-3i$

Β3.

Είναι $|u+w|=|4z_1-z_2-i|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|u-3i|=|4(i+1)-(1-i)-i|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|u-3i|=|4+4i-1+\cancel{i}-\cancel{i}|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|u-3i|=|3+4i|\Leftrightarrow|u-3i|=\sqrt{9+16}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|u-3i|=\sqrt{25}\Leftrightarrow|u-3i|=5\overset{u=x+yi}{\Leftrightarrow}|(x+yi)-3i|=5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|x+(y-3)i|=5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-3)^2}=5\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=25$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των M(u) είναι ο κύκλος με κέντρο K(0,3) και ρ=5.

ΘΕΜΑ Γ

$h(x)=x-\ln(e^x+1), x\in\mathbb{R}$

Γ1.

$h'(x)=1-\frac{1}{e^x+1}(e^x+1)'=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=$

$=\frac{1}{e^x+1}>0$ *άρα η h γνησίως αύξουσα για* $x\in\Re$

$h''(x)=-\frac{1}{(e^x+1)^2}(e^x+1)'=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}<0$

Άρα η h(x) κοίλη για $x\in\mathbb{R}$

Γ2.

Έχουμε $e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}$

Είναι $e^{h(x)}=e^{x-\ln(e^x+1)}=\frac{e^x}{e^{\ln(e^x+1)}}=\frac{e^x}{e^x+1}$

Οπότε $e^{h(1)}=\frac{e}{e+1}$, $h(1)=1-\ln(e+1)$

$e^{h(2h'(x))}<e^{h(1)}\overset{e^x\uparrow}{\Rightarrow}h(2h'(x))<h(1)\Rightarrow$

$\Rightarrow 2h'(x) < 1 \Rightarrow h'(x) < \frac{1}{2}$

Είναι $h'(0) = \frac{1}{e^0+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Επειδή η h(x) κοίλη άρα η $h'(x)$ γνησίως φθίνουσα

Οπότε $h'(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow h'(x) < h'(0) \underset{h' \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Rightarrow} x > 0$

Γ3.

Αναζητούμε το $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ *για την* Ο.Α.

Είναι

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}[x - \ln(e^x+1)] =$

$= \lim_{x\to+\infty}[\ln e^x - \ln(e^x+1)] =$

$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$ (1)

Θέτουμε $u = \frac{e^x}{e^x+1}$

Είναι $\lim_{x\to+\infty} u = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'} =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$ (2)

Από (1),(2) $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{u\to1} \ln u = \ln 1 = 0$

Άρα, η ευθεία y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h για $x \to +\infty$

Για την Π.Α της C_h στο $-\infty$ έχουμε:

$\varepsilon : y = \lambda x + \beta$

όπου

$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lambda$ *και* $\lim_{x\to-\infty}[h(x) - \lambda x] = \beta$

Είναι

$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x - \ln(e^x+1)}{x} =$

$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x} - \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}ln(e^x+1)\right)=1-0=1$

Άρα λ=1

Όπου $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln 1=0$

$e^x+1=u$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-\lambda x]=\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-x]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}[x-\ln(e^x+1)-x]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}[-\ln(e^x+1)]=-\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right)=$

$=\ln 1=0$ $\quad$ *Άρα* $\beta=0$

Άρα, η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y=x$

Γ4.

$\varphi(x)=e^x(h(x)+\ln 2)$

$E\begin{cases}C\varphi\\ x'x\\ x=1\end{cases} \qquad E=\int_0^1|\varphi(x)|dx \ (1)$

$\varphi(x)=0\Rightarrow e^x(h(x)+\ln 2)=0$

$e^x>0$

$h(x)+\ln 2=0$

$\ln e^x-\ln(e^x+1)+\ln 2=0\Leftrightarrow \ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\frac{2e^x}{e^x+1}=0=\ln 1\Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x+1}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^x=e^x+1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$

$\varphi(x)>0\Rightarrow \left.\begin{matrix}e^x(h(x)+\ln 2)>0\\ e^x>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow h(x)+\ln 2>0\overset{*}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \ln\frac{2e^x}{e^x+1}>0\Rightarrow \ln\frac{2e^x}{e^x+1}>\ln 1\Rightarrow \frac{2e^x}{e^x+1}>1\Rightarrow$

$* \left(\begin{matrix}h(x)+\ln 2=x-\ln(e^x+1)+\ln 2=\\ \ln e^x-\ln(e^x+1)+\ln 2=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2=\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\end{matrix}\right)$

$\Rightarrow 2e^x>e^x+1\Rightarrow e^x>1\Rightarrow e^x>e^0\Rightarrow x>0$

Άρα η (1) γράφεται $E=\int_0^1 |\varphi(x)|dx=\int_0^1 \varphi(x)dx=$

$$=\int_0^1 e^x \ln\frac{2e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 (e^x+1)'\ln\frac{2e^x}{e^x+1}dx=$$

$$=\left[(e^x+1)\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1-\int_0^1 (e^x+1)\frac{1}{\frac{2e^x}{e^x+1}}\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)'dx\overset{**}{=}$$

$$=\left[(e^x+1)\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1-\int_0^1 (e^x+1)\frac{e^x+1}{2e^x}\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}dx$$

$$=\left[(e^x+1)\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1-[x]_0^1=(e+1)\ln\frac{2e}{e+1}-2\ln\frac{2}{2}-1=$$

$$=(e+1)\ln\frac{2e}{e+1}-1\ \tau.\mu.$$

$$**\left(\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{2e^x(e^x+1)-2e^xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}\right)$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$$

Δ1)

Για να είναι συνεχής η f στο $x_o=0$ πρέπει $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

$f(0)=1$

Επειδή $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x=0$

Επειδή η f συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων άρα και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$

Για $x\neq 0$:

$$f'(x)=\frac{(e^x-1)'}{x}=\frac{(e^x-1)'x-(e^x-1)(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{e^xx-(e^x-1)}{x^2}=\frac{e^xx-e^x+1}{x^2}$$

Θέτουμε $g(x) = xe^x - e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$g'(x) = (xe^x - e^x + 1)' = (x)'e^x + x(e^x)' - e^x + 0 =$

$= e^x + xe^x - e^x = xe^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο.Ε	

$g_{min} = g(0) = 0 - 1 + 1 = 0$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$

και ισχύει $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Άρα για $x \neq 0$ έχουμε: $g(x) > 0$

Οπότε $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

Άρα f: γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2.

α)

F: κυρτή $\Rightarrow f' \uparrow$

$\int_1^{2'(x)} f(u)du = 0$

Έστω

$h(x) = \int_1^{2f'(x)} f(u)du$ οπότε για x=0 $h(0) = \int_1^{2f'(0)} f(u)du$

Όμως για x=0 $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - 1 - x}{x}}{x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{D.L.H.}{=}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\underset{D.L.H}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Άρα $h(0)=\int_1^{2f'(0)} f(u)du=\int_1^{2\cdot\frac{1}{2}} f(u)du=\int_1^1 f(u)du=0$

Έστω ότι υπάρχει $x_0\neq 0$ ώστε

$h(x_0)=0$ τότε $\int_1^{2f'(x_0)} f(u)du=0\underset{\text{σχέση (1)}}{\overset{f(u)>0}{\Rightarrow}}2f'(x_0)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x_0)=\frac{1}{2}=f'(0)\overset{f':1-1}{\Rightarrow}x_0=0$ άτοπο

σχέση (1): $f((-\infty,+\infty))\overset{f:\uparrow}{=}(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x))=(0,+\infty)$ άρα $f(x)>0$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

B)

Έστω $M(x,y)=M(x(t),y(t))=M(x(t),\underbrace{\frac{e^{x(t)}-1}{x(t)}}_{y(t)})$

Έχουμε για $t=t_0$ $x'(t_0)=2y'(t_0)$ (1)

$$y'(t)=\frac{e^{x(t)}x'(t)\cdot x(t)-(e^{x(t)}-1)x'(t)}{x^2(t)}=$$

$$=\frac{x'(t)(e^{x(t)}\cdot x(t)-e^{x(t)}+1)}{x^2(t)}$$

Άρα η (1) γίνεται $x'(t_0)=\dfrac{2x'(t_0)\left(e^{x(t_0)}x(t_0)-e^{x(t_0)}+1\right)}{x^2(t_0)}$

$$\overset{x'(t_0)>0}{\Rightarrow}1=\frac{2e^{x(t_0)}x(t_0)-e^{x(t_0)}+1}{x^2(t_0)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{e^{x(t_0)}x(t_0)-e^{x(t_0)}+1}{x^2(t_0)}$$

$f'(0)=f'\left(x(t_0)\right)\overset{f'_{1-1}}{\Rightarrow}x(t_0)=0$

Άρα σημείο $M\left(x(t_0),f(x(t_0))\right)$ $M(0,1)$

$y(t_0)=f(x(t_0))=f(0)=1$

Δ3.

$$g(x) = \left(xf(x) + 1 - e\right)^2 (x-2)^2$$

$$g(x) = \left(x\frac{e^x - 1}{x} + 1 - e\right)^2 (x-2)^2$$

$$g(x) = (e^x - 1 + 1 - e)^2 (x-2)^2$$

$$g(x) = (e^x - e)^2 (x-2)^2 \Rightarrow g(x) = [(e^x - e)(x-2)]^2$$

$$g'(x) = 2\cdot(e^x - e)(x-2)\cdot[(e^x - e)(x-2)]' =$$

$$g'(x) = 2\cdot(e^x - e)(x-2)\cdot[(e^x - e)'(x-2) + (e^x - e)(x-2)'] =$$

$$g'(x) = 2\cdot(e^x - e)(x-2)\cdot[e^x(x-2) + (e^x - e)] =$$

$$g'(x) = 2\cdot(e^x - e)(x-2)\cdot(xe^x - 2e^x + e^x - e) =$$

$$= 2\cdot(e^x - e)(x-2)\cdot(xe^x - e^x - e)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2(e^x - e)(x-2)(xe^x - e^x - e) = 0 \quad \begin{cases} e^x - e = 0 \Rightarrow e^x = e \Rightarrow x = 1 \\ \text{ή} \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{ή} \\ xe^x - e^x - e = 0 \end{cases}$$

Θέτουμε $K(x) = x e^x - e^x - e, \quad x > 0$

$K'(x) = e^x + xe^x - e^x = x e^x > 0$

x	0	$+\infty$
$K'(x)$		$+$
$K(x)$		$\nearrow$

Για την K(x) στο [1,2] έχουμε:

- η K(x) συνεχής στο [1,2] ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

$$\left.\begin{aligned} K(1) &= \cancel{e} - \cancel{e} - e = -e < 0 \\ K(2) &= 2e^2 - e^2 - e = e^2 - e > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K(1)\cdot K(2) < 0$$ Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (1,2)$ ώστε: $K(x_o) = 0$

Για $x > x_o \overset{K(x):\uparrow}{\Rightarrow} K(x) > K(x_o) \Rightarrow K(x) > 0$

Για $0 < x < x_o \overset{K(x):\uparrow}{\Rightarrow} K(x) < K(x_o) \Rightarrow K(x) < 0$

Οπότε

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$2(e^x-e)$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$K(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$T.E$		$T.M$		$T.E$		

$e^x - e > 0 \Rightarrow e^x > e \Rightarrow x > 1$
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

Άρα η g παρουσιάζει στο x=1 τοπικό ελάχιστο
η g παρουσιάζει στο $x=x_0$ τοπικό μέγιστο
η g παρουσιάζει στο x=2 τοπικό ελάχιστο

Επιμέλεια:

Μυλωνίδης Στάθης, Τάνης Σάκης, Ηλιάδης Κωνσταντίνος, Σαμαρά Φράγκη