ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΑΛ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 30
Α2. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 13
Α3. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 59
Α4.
α) Σ
β) Λ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Σ

Θέμα Β

Β1) $V=V_1+V_2+V_3+V_4=12+8+14+6=40$

Β2)

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i
[2,4)	3	12	0,3
[4,6)	5	8	0,2
[6,8)	7	14	0,35
[8,10)	9	6	0,15
Σύνολο	-	40	1

$$f_1=\frac{V_1}{V}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}=0,3 \text{ ή } 30\%$$

$$f_2=\frac{V_2}{V}=\frac{8}{40}=\frac{2}{10}=0,2 \text{ ή } 20\%$$

$$f_3=\frac{V_3}{V}=\frac{14}{40}=\frac{7}{20}=\frac{35}{100}=0,35 \text{ ή } 35\%$$

$$f_4=\frac{V_4}{V}=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}=\frac{15}{100}=0,15 \text{ ή } 15\%$$

Β3)
α)

Μέση τιμή $\bar{x}=\frac{1}{v}\sum_{1}^{4}x_i v_i=$

$$=\frac{3\cdot 12+5\cdot 8+7\cdot 14+9\cdot 6}{40}=$$

$$=\frac{36+40+98+54}{40}=\frac{228}{40}=5,7$$

β)

Στο διάστημα [4 - 6) πλάτους 2 υπάρχουν 8 πωλητές
Στο διάστημα [4,5 - 6) πλάτος 1,5 υπάρχουν x;

$$x = \frac{8 \cdot 1,5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Άρα το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες ευρώ (δηλ. $x \geq 4,5$) είναι: 6+14+6=26 πωλητές

ΘΕΜΑ Γ

Γ1)

P(K)=x_1
P(A)=x_2

$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad x_1 < x_2$

$f'(x) = 12x^2 - 7x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 49 - 48 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2 \cdot 12} = \begin{cases} \dfrac{8}{2 \cdot 12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{6}{2 \cdot 12} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow 12x^2 - 7x + 1 > 0$ πρόσημο τριωνύμου

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f'(x)	+	0	−	0	+	
f(x)	↗		↘		↗	
		Τ.Μ		Τ.Ε		

Είναι $x_1 > x_2$.

Στο $x_1 = \frac{1}{4}$ η f έχει τοπικό ελάχιστο άρα $P(K) = \frac{1}{4}$.

Στο $x_2 = \frac{1}{3}$ η f έχει τοπικό μέγιστο άρα $P(A) = \frac{1}{3}$.

Είναι $P(K) + P(A) + P(\Pi) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\Pi) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\Pi) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \Rightarrow P(\Pi) = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$

Γ2)

$$P(\Gamma)=\overset{\text{ασυμβίβαστα}}{P(K\cup A)}=P(K)+P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3+4}{12}=\frac{7}{12}$$

$$P(\Delta)=P(K\cup A)'=1-P(K\cup A)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

$$P(E)=P(A\cup \Pi')=P(A)+P(\Pi')-P(A\cap \Pi')=P(A)+1-P(\Pi)-P(A-\Pi)=$$

$$=P(A)+1-P(\Pi)-P(A)+P(A\cap \Pi)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}\quad (P(A\cap\Pi)=0)$$

Γ3)

$$N(A)=N(\Pi)-4$$

$$N(A)+N(K)+N(\Pi)=N(\Omega)$$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}\Rightarrow N(\Omega)=3N(A)$$

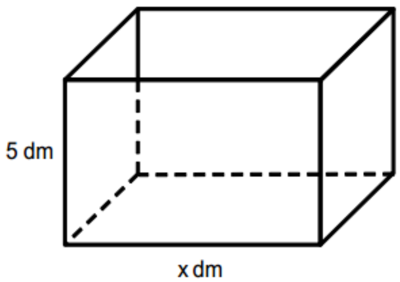
$$P(\Pi)=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}\Rightarrow\frac{5}{12}=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}\Rightarrow 5N(\Omega)=12N(\Pi)$$

$$\left.\begin{array}{l}N(\Omega)=3N(A)\\5N(\Omega)=12N(\Pi)\end{array}\right\}\overset{N(A)=N(\Pi)-4}{\Rightarrow}\left.\begin{array}{l}N(\Omega)=3(N(\Pi)-4)\\5N(\Omega)+12N(\Pi)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}N(\Omega)=3N(\Pi)-12\\5N(\Omega)=12N(\Pi)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}N(\Omega)-3N(\Pi)=-12\\5N(\Omega)-12N(\Pi)=0\end{array}\right\}\overset{\cdot(-4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-4N(\Omega)+12N(\Pi)=48\\5N(\Omega)-12N(\Pi)=0\end{array}\right\}\overset{\oplus}{\Rightarrow}N(\Omega)=48$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1)

u=5dm

Π=20dm

0<x<10

$$\Pi=2x\,2y=20\Rightarrow x+y=10\Rightarrow y=10-x$$

$$E=2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\underset{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta}{\varepsilon_3}=10x+10\cdot(10-x)+x\cdot(10-x)=$$

$$=10x+100-10x+10x-x^2=-x^2+10x+100\qquad x\in(0,10)$$

Με $\varepsilon_1 = 5x$

$\varepsilon_2 = 5y = 5\cdot(10-x)$

$\varepsilon_3 = x\cdot y = x\cdot(10-x)$

x	0	5	10
E′(x)	+	0	−
E(x)	↗		↘

Έχουμε: $E'(x) = -2x+10 \qquad x\in(0,10)$

$E'(x)=0 \Rightarrow -2x+10=0 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$

$E'(x)>0 \Rightarrow -2x+10>0 \Rightarrow 2x<10 \Rightarrow x<5$

Για x=5 έχουμε τη μέγιστη επιφάνεια με $E(5)=-5^2+10\cdot5+100=125dm^2$

Δ2)

α) $A_i(x_i, y_i) \qquad y_i = E(x_i) \qquad i=1,2,......15$

με $5 = x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{14} < x_{15} = 9$

CV>10%

$\bar{x}=8, \qquad 2s^2-5s+2=0$

$\Delta = (-5)^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9$

$s_{1,2}=\dfrac{5\pm3}{4}=\left\langle\begin{array}{l}2\\ \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Αν $s=\dfrac{1}{2}$ τότε $CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{8}=\dfrac{1}{16}<10\%$ αδύνατο άρα $\boxed{s=2}$

β) $s^2=\dfrac{1}{v}\left\{\Sigma x_i^{\;2}-\dfrac{(\Sigma x_i)^2}{v}\right\} \Rightarrow s^2=\dfrac{1}{v}\Sigma x_i^{\;2}-\dfrac{(\Sigma x_i)^2}{v^2} \Rightarrow s^2=\dfrac{1}{v}\Sigma x_i^{\;2}-\bar{x}^2$

Άρα $2^2=\dfrac{1}{15}\Sigma x_i^{\;2}-8^2 \Rightarrow 4\cdot15=\Sigma x_i^{\;2}-15\cdot64 \Rightarrow 4\cdot15+15\cdot64=\Sigma x_i^{\;2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma x_i^{\;2}=15(4+64) \Rightarrow \Sigma x_i^{\;2}=15\cdot68=1020$

Οπότε $\bar{x}'=\dfrac{\Sigma x_i^{\;2}}{v}=\dfrac{15\cdot68}{15}=68$

Δ3)

$B=\{A_i(x_i,y_i) \quad i=1,2,.....15 \quad \text{τότε} \quad y_i>-4x_i+9R+1\}$

Επειδή η E(x) παρουσιάζει μέγιστο στο x=5 και είναι γνησίως φθίνουσα στο [5,9] άρα

$R=E(5)-E(9)=125-109=+16$

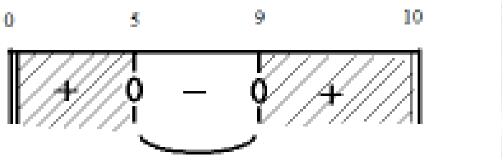
$y_1 = E(5) = 125$

$y_{15} = E(9) = -(9)^2 + 10\cdot 9 + 100 = -81 + 90 + 100 = 109$

$-x_i^{\ 2} + 10x_i + 100 > -4x_i + 9R + 1 \Rightarrow x_i^{\ 2} - 14x_i + 9R - 99 < 0 \Rightarrow x_i^{\ 2} - 14x_i + 9\cdot 16 - 99 < 0 \Rightarrow x_i^{\ 2} - 14x_i + 45 < 0$

Άρα $\Delta = (-14)^2 - 4\cdot 1\cdot 45 = 196 - 180 = 16$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm 4}{2} = \begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases}$$



Άρα $x_i \in (5,9)$

Άρα $B = \{A_2, ...A_{14}\}$ οπότε

N(B)=13

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{13}{15}$$

Επιμέλεια:

Μυλωνίδης Στάθης, Τάνης Σάκης, Ηλιάδης Κωνσταντίνος, Σαμαρά Φράγκη