

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ  
ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 30

**A2.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 13

**A3.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 59

**A4.**

**α)** Σ

**β)** Λ

**γ)** Λ

**δ)** Λ

**ε)** Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1**  $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$

**B2**

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i$
[2,4)	3	12	0,3
[4,6)	5	8	0,2
[6,8)	7	14	0,35
[8,10)	9	6	0,15
Σύνολο	-	40	1

$$f_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ ή } 30\%$$

$$f_2 = \frac{V_2}{V} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ ή } 20\%$$

$$f_3 = \frac{V_3}{V} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0,35 \text{ ή } 35\%$$

$$f_4 = \frac{V_4}{V} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ ή } 15\%$$

**B3**

**α)**

$$\begin{aligned} \text{Μέση τιμή } \bar{x} &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i = \\ &= \frac{3 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 6}{40} = \\ &= \frac{36 + 40 + 98 + 54}{40} = \frac{228}{40} = 5,7 \end{aligned}$$

β)

Στο διάστημα  $[4 - 6]$  πλάτους 2 υπάρχουν 8 πωλητές  
 Στο διάστημα  $[4,5 - 6]$  πλάτος 1,5 υπάρχουν  $x$ ;

$$x = \frac{8 \cdot 1,5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Άρα το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες ευρώ (δηλ.  $x \geq 4,5$ ) είναι:  $6+14+6=26$  πωλητές

### ΘΕΜΑ Γ

Γ1

$$P(K)=x_1$$

$$P(A)=x_2$$

$$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1 \quad x \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2$$





$$f'(x) = 12x^2 - 7x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 49 - 48 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2 \cdot 12} = \begin{cases} \frac{8}{2 \cdot 12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ \frac{6}{2 \cdot 12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 12x^2 - 7x + 1 > 0 \quad \text{πρόσημο τριωνύμου}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)					
		T.M	T.E		

Είναι  $x_1 < x_2$ .

Στο  $x_1 = \frac{1}{4}$  η f έχει τοπικό ελάχιστο άρα  $P(K) = \frac{1}{4}$ .

Στο  $x_2 = \frac{1}{3}$  η f έχει τοπικό μέγιστο άρα  $P(A) = \frac{1}{3}$ .

$$\text{Είναι } P(K) + P(A) + P(\Pi) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\Pi) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\Pi) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \Rightarrow P(\Pi) = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

**Γ2**

$$P(\Gamma) = \overset{\text{ασυμβίβαστα}}{P(K \cup A)} = P(K) + P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$$

$$P(\Delta) = P(K \cup A)' = 1 - P(K \cup A) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cup \Pi') = P(A) + P(\Pi') - P(A \cap \Pi') = P(A) + 1 - P(\Pi) - P(A - \Pi) = \\ &= P(A) + 1 - P(\Pi) - P(A) + P(A \cap \Pi) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} \quad (P(A \cap \Pi) = 0) \end{aligned}$$

**Γ3**

$$N(A) = N(\Pi) - 4$$

$$N(A) + N(K) + N(\Pi) = N(\Omega)$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Rightarrow N(\Omega) = 3N(A)$$

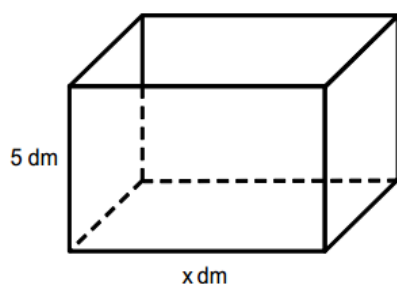
$$P(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} \Rightarrow 5N(\Omega) = 12N(\Pi)$$

$$\left. \begin{aligned} N(\Omega) &= 3N(A) \\ 5N(\Omega) &= 12N(\Pi) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} N(A) &= N(\Pi) - 4 \\ \Rightarrow N(\Omega) &= 3(N(\Pi) - 4) \\ \Rightarrow 5N(\Omega) + 12N(\Pi) & \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} N(\Omega) &= 3N(\Pi) - 12 \\ 5N(\Omega) &= 12N(\Pi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} N(\Omega) - 3N(\Pi) &= -12 \quad \cdot (-4) \\ 5N(\Omega) - 12N(\Pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} -4N(\Omega) + 12N(\Pi) &= 48 \\ 5N(\Omega) - 12N(\Pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \overset{\oplus}{\Rightarrow} N(\Omega) = 48$$

**ΘΕΜΑ Δ**



**Δ1**

$$u = 5 \text{ dm}$$

$$\Pi = 20 \text{ dm}$$

$$0 < x < 10$$

$$\Pi = 2x + 2y = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

$$E = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \underset{\text{βάση}}{\varepsilon_3} = 10x + 10 \cdot (10 - x) + x \cdot (10 - x) =$$

$$= 10x + 100 - 10x + 10x - x^2 = -x^2 + 10x + 100 \quad x \in (0, 10)$$

Με  $\varepsilon_1 = 5x$

$\varepsilon_2 = 5y = 5 \cdot (10 - x)$

$\varepsilon_3 = x \cdot y = x \cdot (10 - x)$

x	0	5	10
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	↗	↘	

Έχουμε :  $E'(x) = -2x + 10 \quad x \in (0, 10)$

$E'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

$E'(x) > 0 \Rightarrow -2x + 10 > 0 \Rightarrow 2x < 10 \Rightarrow x < 5$

Για  $x=5$  έχουμε τη μέγιστη επιφάνεια με  $E(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 + 100 = 125 \text{ dm}^2$

**Δ2**

**α)**  $A_i(x_i, y_i) \quad y_i = E(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, 15$

με  $5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{14} < x_{15} = 9$

$CV > 10\%$

$\bar{x} = 8, \quad 2s^2 - 5s + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$

$s_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Αν  $s = \frac{1}{2}$  τότε  $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{8} = \frac{1}{16} < 10\%$  αδύνατο άρα  $s = 2$

**β)**  $s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{v} \right\} \Rightarrow s^2 = \frac{1}{v} \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{v^2} \Rightarrow s^2 = \frac{1}{v} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$

Άρα  $2^2 = \frac{1}{15} \sum x_i^2 - 8^2 \Rightarrow 4 \cdot 15 = \sum x_i^2 - 15 \cdot 64 \Rightarrow 4 \cdot 15 + 15 \cdot 64 = \sum x_i^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum x_i^2 = 15(4 + 64) \Rightarrow \sum x_i^2 = 15 \cdot 68 = 1020$

Οπότε  $\bar{x}' = \frac{\sum x_i^2}{v} = \frac{15 \cdot 68}{15} = 68$

**Δ3**

$B = \{A_i(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, 15 \quad \text{τότε} \quad y_i > -4x_i + 9R + 1\}$

Επειδή η  $E(x)$  παρουσιάζει μέγιστο στο  $x=5$  και είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[5, 9]$  άρα

$R = E(5) - E(9) = 125 - 109 = 16$

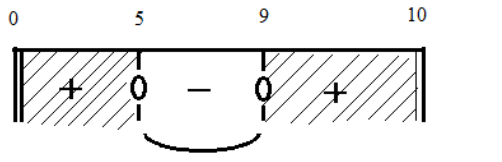
$$y_1 = E(5) = 125$$

$$y_{15} = E(9) = -(9)^2 + 10 \cdot 9 + 100 = -81 + 90 + 100 = 109$$

$$-x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 9R + 1 \Rightarrow x_i^2 - 14x_i + 9R - 99 < 0 \Rightarrow x_i^2 - 14x_i + 9 \cdot 16 - 99 < 0 \Rightarrow x_i^2 - 14x_i + 45 < 0$$

$$\text{Άρα } \Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 45 = 196 - 180 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm 4}{2} = \begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases}$$



$$\text{Άρα } x_i \in (5, 9)$$

$$\text{Άρα } B = \{A_2, \dots, A_{14}\} \text{ οπότε}$$

$$N(B) = 13$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{13}{15}$$

**Επιμέλεια:**

**Μυλωνίδης Στάθης , Τάνης Σάκης , Ηλιάδης Κωνσταντίνος , Σαμαρά Φράγκη**