21 Ιουνίου 2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία -απόδειξη θεωρήματος στη σελίδα 98 στο σχολικό βιβλίο.

Α2. Θεωρία-διατύπωση θεωρήματος στη σελίδα 192 στο σχολικό βιβλίο.

Α3. Θεωρία-ορισμός στη σελίδα 141 στο σχολικό βιβλίο.

Α4. **α) Σωστό , β) Σωστό, γ) Λάθος[1], δ) Λάθος[2], ε) Λάθος**

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Για $z \neq -\frac{i}{2}$ έχουμε διαδοχικά:

$$w = \frac{2z-i}{2z+i} \in \mathrm{Im} \Leftrightarrow \overline{w} = -w \Leftrightarrow \frac{2\overline{z}+i}{2\overline{z}-i} = -\frac{2z-i}{2z+i} \Leftrightarrow (2\overline{z}+i)(2z+i) = -(2\overline{z}-i)(2z-i)$$

$$\Leftrightarrow 8z\overline{z} = 2 \Leftrightarrow z\overline{z} = \frac{1}{4}$$

Αν θέσουμε: $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ τότε η παραπάνω σχέση γίνεται: $x^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ που είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$. Επειδή $z \neq 0 - \frac{1}{2}i$, θα έχουμε εξαίρεση του σημείου $M(0, -\frac{1}{2})$.

[1]Υπάρχει αντιπαράδειγμα-εφαρμογή στη σελίδα 143 στο σχολικό βιβλίο.
[2] Είναι (Β, Α)

B2.

Έχουμε διαδοχικά: $|w|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{2z-i}{2z+i}\right|=1 \Leftrightarrow |2z-i|=|2z+i| \Leftrightarrow |2z-i|^2=|2z+i|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2z-i)(2\overline{z}+i)=(2z+i)(2\overline{z}-i) \Leftrightarrow 4zi=4\overline{z}i \Leftrightarrow z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$$

Αφού θέσαμε $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ θα είναι $z=x\ (y=0)$ και επειδή οι μιγαδικοί z είναι αυτοί του Β1 ερωτήματος, θα είναι: $x^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$.

Έτσι θα είναι τελικά : $x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ ή $x=-\frac{1}{2}$ και $y=0$. Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι : $z_1=\frac{1}{2}$.

$z_2=-\frac{1}{2}$.

B3.

Για $z=\frac{1}{2}\Rightarrow w=\frac{1-i}{1+i}\Rightarrow w=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\Rightarrow w=\frac{(1-i)^2}{2}\Rightarrow w=\frac{-2i}{2}\Rightarrow w=-i$

Άρα έχουμε: $w^4+iw^7=(-i)^4+i(-i)^7=1+i\cdot i=1-1=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η συνάρτηση $f(x)=ax^3+x,\ x\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}-\{0\}$ είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) με $f'(x)=3ax^2+1,\ x\in\mathbb{R}$. Για να έχει εφαπτομένη την $y=4x-2$ στο σημείο $A(1,f(1))$ πρέπει: $f'(1)=4\Rightarrow 3a+1=4\Rightarrow a=1$. Πράγματι[3], τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α είναι :

$y-f(1)=f'(1))(x-1)$

$y-2=4(x-1)$

$y=4x-2$

Γ2.

i) Για $a=1\Rightarrow f(x)=x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+1>0,\ x\in\mathbb{R}$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

[3] Προσοχή δεν αρκεί μόνο η σχέση $f'(1)=4$, αφού τότε η εφαπτομένη της C_f μπορεί να είναι παράλληλη της $y=4x-2$.

ii) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x^3+x)>10 \Leftrightarrow f(x^3+x)>f(2) \Leftrightarrow x^3+x>2 \Leftrightarrow x^3+x-2>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)>0$$
$$\Leftrightarrow x>1$$

αφού $x^2+x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ διότι $\Delta=-7<0$.

Γ3

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x^2+1}\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1}\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$, αφού από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε: $\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le|x| \Leftrightarrow -|x|\le x\eta\mu\dfrac{1}{x}\le|x|, \lim\limits_{x\to 0}|x|=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η σχέση $f(x)+xf'(x)=2x,\ x\in(0,\infty)$ γράφεται :

$\left(xf(x)\right)'=(x^2)'\Rightarrow xf(x)=x^2+c$ (1), $x\in(0,\infty)$ με c αυθαίρετη σταθερά την οποία θα προσδιορίσουμε.

Επειδή $f(1)=10$ η σχέση (1) για $x=1$ γίνεται : $x=1\Rightarrow f(1)=1+c\Rightarrow 10=1+c\Rightarrow c=9$

Άρα $xf(x)=x^2+9,\ x\in(0,\infty)$ ή $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x},\ x\in(0,\infty)$.

Δ2.

Η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωστη την $x=0$ (άξονας των $y'y$) αφού:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+9}{x}=+\infty$$

Για την πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωστη έχουμε: $y=\lambda x+\beta$
με
$\lambda=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+9}{x^2}=1$ και $\beta=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{x}=0$, και έτσι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y=x$ (διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας του συστήματος συντεταγμένων).

Δ3.

Έχουμε (αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων)

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+9)}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2},\ x\in(0,\infty)$$

$$f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2-9)\cdot 2x}{x^4}=\frac{18x}{x^4}=\frac{18}{x^3}>0,\ x\in(0,\infty)$$

και άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$.

Δ4.

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[1,x]$ ($x>1$)

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,x]$ (άρα και συνεχής σε αυτό) με

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+9)}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2},\ x\in(0,\infty)$$

Άρα θα υπάρχει ένα ,τουλάχιστον , $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)-10}{x-1}$ (1), $x>1$

Τώρα επειδή $1<\xi<x$ και η f' είναι γνησίως άυξουσα στο $(0,\infty)$ (όπως προέκυψε από το προηγούμενο ερώτημα) θα έχουμε διαδοχικά και λόγω της σχέσης (1):

$$1<\xi<x\Rightarrow f'(\xi)<f'(x)\Rightarrow\frac{f(x)-10}{x-1}<f'(x)\Rightarrow f(x)-10<f'(x)(x-1),x\in(1,\infty)$$

Η ισότητα στην παραπάνω σχέση ισχύει, προφανώς για $x=1$ και άρα θα έχουμε τελικά:

$$f(x)-10\le f'(x)(x-1),x\in[1,\infty)$$