

20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία -απόδειξη σελίδα 151 σχολικό βιβλίο.

A2. Θεωρία-ορισμός σελίδα 14 σχολικό βιβλίο.

A3. Θεωρία-ορισμός σελίδα 65 σχολικό βιβλίο.

A4. α) Λάθος¹, β) Λάθος², γ) Σωστό, δ) Σωστό, ε) Λάθος³

ΘΕΜΑ Β

B1.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
[10,12)	11	6	10	6	10
[12,14)	13	12	20	18	30
[14,16)	15	24	40	42	70
[16,18)	17	12	20	54	90
[18, 20)	19	6	10	60	100
ΣΥΝΟΛΟ		60	100		

Η 1^η στήλη των κλάσεων: Επειδή οι 5 κλάσεις είναι ισοπλατείς θα έχουμε ότι η κάθε μία θα έχει εύρος $\frac{20-10}{5} = 2$, και άρα θα είναι κάθε φορά με προσθεση στο αριστερό άκρο κατά 2.

Η 2^η στήλη : συμπληρώνεται από την περιγραφή των δεδομένων (η 1^η κλάση και η 5^η κλάση περιγράφονται άμεσα, ενώ η 2^η και η 4^η κλάση συμπεραίνονται με αφαίρεση της

¹ Βρίσκεται στο $(\bar{x} - 3s, \bar{x} - 3s)$

² ...είναι πάντοτε ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων δηλαδή το μέγεθος του δείγματος n .

³ Είναι μέτρο θέσης.

προηγούμενης και της επόμενης αντίστοιχα, από αυτά που περιγράφονται 18-6=12). Η κλάση [14,16) είναι το υπόλοιπο της αφαίρεσης 60-18-18=24)

Η 3^η στήλη: $f_i \% = \frac{v_i}{v} \cdot 100, i = 1, 2, 3, 4, 5$

Η 4^η και 5^η στήλη: από τον ορισμό της Αθροιστικής Συχνότητας και της Αθροιστικής Σχετικής Συχνότητας.

B2.

Η μέση βαθμολογία των μαθητών είναι: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} = \frac{900}{60} = 15$ (ή $\bar{x} = \sum x_i f_i = 15$)

Για την διάμεσο⁴: Η διάμεσος δ έχει την ιδιότητα: να έχει το 50% των παρατηρήσεων με τιμές μεγαλύτερη ή ίσες από αυτήν και το άλλο 50% των παρατηρήσεων να έχει τιμές μικρότερες ή ίσες από αυτήν. Άρα, από την στήλη των f_i % (και επειδή οι τιμές των κλάσεων είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες), προκύπτει ότι $\delta = 15$ δηλαδή το μέσο της 3^{ης} κλάσης [14,16).

B3. Αφού οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες, θα έχουμε ότι στην τελευταία κλάση [18,20) που περιέχει το 10% θα είναι 5% στο [18,19) και 5% στο [19,20)⁵. Άρα θα δοθεί έπαινος σε αυτούς που είχαν βαθμολογία ≥ 19 .

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$$\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$P(k) = \frac{a}{k^2 + 1}, k \in \Omega, \text{ με } a > 0$$

Άρα:

⁴ Μπορεί να γίνει και με την κατασκευή του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων, σε συνδυασμό με την χρήση τη ομοιότητας των τριγώνων.

⁵ Κανονικά συμπεριλαμβάνεται και η βαθμολογία 20

$$P(-1) = \frac{a}{2}$$

$$P(0) = a$$

$$P(1) = \frac{a}{2}$$

$$P(2) = \frac{a}{5}$$

Πρέπει να ισχύει: $P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{22a}{10} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{5}{11}$

Και έτσι οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

$$P(-1) = \frac{5}{22}$$

$$P(0) = \frac{5}{11}$$

$$P(1) = \frac{5}{22}$$

$$P(2) = \frac{1}{11}$$

Γ2⁶.

Το ενδεχόμενο Α είναι : $A = \{2\}$ διότι:

$$\kappa^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \kappa > 1 \text{ ή } \kappa < -1$$

$$\kappa \in \Omega \Rightarrow \kappa = 2$$

Άρα: $P(A) = P(2) = \frac{1}{11}$

Το ενδεχόμενο Β είναι : $B = \{-1, 1, 2\}$ διότι

$$\kappa^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1 \text{ ή } \kappa = -1$$

$$\kappa^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = -2$$

$$\kappa \in \Omega \Rightarrow \kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 1 \text{ ή } \kappa = 2$$

Άρα: $P(B) = P(-1) + P(1) + P(2) = \frac{5}{22} + \frac{5}{22} + \frac{1}{11} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$

Για τα ενδεχόμενα Γ και Δ, όπως περιγράφονται στην εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

⁶ Η εύρεση των πιθανοτήτων σε αυτό το ερώτημα μπορεί να γίνει και με την εύρεση των αντίστοιχων ενδεχομένων με αναγραφή.

$$\Gamma = A - B$$

$$\Delta = A' \cup B' = (A \cap B)' \text{ με } A \cap B = \{2\}$$

$$\text{Άρα: } P(A \cap B) = P(2) = \frac{1}{11} \text{ και έτσι έχουμε: } P(\Gamma) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{11} - \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$$

$$\text{και } P(\Delta) = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

Γ3.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \kappa x + \frac{9}{4}, x \in \mathbb{R}, \kappa \in \Omega$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως πολυωνυμική) με παράγωγο:

$$f'(x) = x^2 + \kappa x + \frac{9}{4}, x \in \mathbb{R}, \kappa \in \Omega$$

Για να πραγματοποιείται το ενδεχόμενο E θα πρέπει:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + \kappa x + \frac{9}{4} > 0, x \in \mathbb{R}, \kappa \in \Omega \text{ και } \Delta = \kappa^2 - 9 < 0, \text{ με } \kappa = -1, 0, 1, 2$$

και άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή για $\kappa \in \Omega$ η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

και έτσι το ενδεχόμενο E πραγματοποιείται πάντα, άρα είναι βέβαιο ενδεχόμενο

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

i) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $E(x) = E_{\text{ΑΓΔΖ}} + E_{\text{ΓΒΘΗ}} = x^2 + (100 - x)^2 = x^2 + 10000 - 200x + x^2$
Άρα $E(x) = 2x^2 - 200x + 10000, x \in (0, 100)$.

ii) Η συνάρτηση $E(x) = 2x^2 - 200x + 10000, x \in (0, 100)$ είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) με παράγωγο:

$$E'(x) = 4x - 200, x \in (0, 100)$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 50$$

Έχουμε:

- $0 < x < 50 \Rightarrow E'(x) < 0 \Rightarrow E(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $(0, 50]$
- $50 < x < 100 \Rightarrow E'(x) > 0 \Rightarrow E(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[50, 100)$

Άρα η συνάρτηση $E(x)$ έχει ελάχιστο στο $x = 50$

Δ2.

$$\bar{x} = 2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} = 2 \Rightarrow \frac{50}{\nu} = 2 \Rightarrow \nu = 25 \quad (\sum_{i=1}^{\nu} x_i = x = 50)$$

Δ3.

Τα εμβαδά των τετραγώνων που κατασκευάζονται με πλευρές τα διαδοχικά τμήματα l_i με αντίστοιχα μήκη x_i ($i = 1, 2, \dots, 25$), είναι αντίστοιχα $E_i = x_i^2$, $i = 1, 2, \dots, 25$.

Η μέση τιμή \bar{z} των E_i , $i = 1, 2, \dots, 25$ είναι: $\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} E_i}{\nu}$.

$$\text{Τώρα έχουμε: } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - (\bar{x})^2 \Rightarrow s^2 = \bar{z} - (\bar{x})^2 \Rightarrow (0,2)^2 = \bar{z} - 4 \Rightarrow \bar{z} = 4,04 \text{ m}^2$$

Δ4.

Έχουμε: $N(\Omega) = 25$

Για το ενδεχόμενο Λ έχουμε: $\Lambda = \{l_i, i = 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24\}$ και έτσι $N(\Lambda) = 12$.

Άρα, αφού η επιλογή είναι τυχαία (δηλαδή τα l_i $i = 1, 2, \dots, 25$ είναι ισοπίθανα), θα έχουμε:

$$P(\Lambda) = \frac{N(\Lambda)}{N(\Omega)} = \frac{12}{25}$$