ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΑΛ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 30
Α2. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 13
Α3. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 59
Α4.
$\alpha \to \Sigma$
$\beta \to \Sigma$
$\gamma \to \Lambda$
$\delta \to \Lambda$
$\varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Β1

$f'(2) = ?$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(2) = 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2 - 9 = 12 - 12 - 9 = -9$$

Β2

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\cdot(-3) = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
f'(x)	+	0	−	0	+	
f(x)	↗		↘		↗	

Στο $(-\infty, -1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
Στο $[-1, 3]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $[3,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
Η f παρουσιάζει στο $x_1 = -1$ τοπικό μέγιστο
με τιμή $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$.
Η f παρουσιάζει στο $x_2 = 3$ τοπικό ελάχιστο
με τιμή $f(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 - 9\cdot 3 + 2 = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$.

Β3

$y = \lambda x + \beta$
$\lambda = f'(2) = -9$ άρα $y = -9x + \beta$
$f(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 - 9\cdot 2 + 2 = 8 - 12 - 18 + 2 = -20$
Όμως $A\big(2, f(2)\big) = \big(2, -20\big)$ ανήκει στην εφαπτομένη $\Rightarrow$ $-20 = -9\cdot 2 + \beta \Rightarrow \beta = -2$
Άρα η εφαπτομένη είναι $y = -9x - 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$
Γ2)

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i
[2,4)	3	12	0,3
[4,6)	5	8	0,2
[6,8)	7	14	0,35
[8,10)	9	6	0,15
Σύνολο	-	40	1

$$f_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ ή } 30\%$$
$$f_2 = \frac{V_2}{V} = \frac{8}{40} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ ή } 20\%$$
$$f_3 = \frac{V_3}{V} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0,35 \text{ ή } 35\%$$
$$f_4 = \frac{V_4}{V} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ ή } 15\%$$

Γ3)
α)
Μέση τιμή $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{1}^{4} x_i \nu_i =$
$$= \frac{3\cdot 12 + 5\cdot 8 + 7\cdot 14 + 9\cdot 6}{40} =$$
$$= \frac{36 + 40 + 98 + 54}{40} = \frac{228}{40} = 5,7$$

β)
Στο διάστημα [4 - 6) πλάτους 2 υπάρχουν 8 πωλητές
Στο διάστημα [4,5 - 6) πλάτος 1,5 υπάρχουν x;

$$x=\frac{8\cdot 1,5}{2}=\frac{12}{2}=6$$

Άρα το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες ευρώ (δηλ. $x\geq 4,5$) είναι: 6+14+6=26 πωλητές

ΘΕΜΑ Δ

<u>Δ1)</u>
u=5dm
Π=20dm
0<x<10

$$\Pi=2x+2y=20\Rightarrow x+y=10\Rightarrow y=10-x$$
$$E=2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\underbrace{\varepsilon_3}_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta}=10x+10\cdot(10-x)+x\cdot(10-x)=$$
$$=10x+100-10x+10x-x^2=-x^2+10x+100 \qquad x\in(0,10)$$
Με $\varepsilon_1=5x$
$$\varepsilon_2=5y=5\cdot(10-x)$$
$$\varepsilon_3=x\cdot y=x\cdot(10-x)$$

x	0	5	10
E′(x)	+	0	−
E(x)	↗		↘

Έχουμε: $E'(x)=-2x+10 \qquad x\in(0,10)$
$$E'(x)=0\Rightarrow -2x+10=0\Rightarrow 2x=10\Rightarrow x=5$$
$$E'(x)>0\Rightarrow -2x+10>0\Rightarrow 2x<10\Rightarrow x<5$$
Για x=5 έχουμε τη μέγιστη επιφάνεια με $E(5)=-5^2+10\cdot 5+100=125dm^2$

<u>Δ2)</u>

$$V=xy\cdot 5=x\cdot(10-x)\cdot 5=50x-5x^2=V(x)$$
$$y=10-x$$
$$V'(x)=50-10x$$
$$V'(x)=0\Rightarrow 50-10x=0$$
$$10x=50\Rightarrow x=5$$

x	0	5	10
$V'(x)$	+	0	−
$V(x)$	↗		↘

$$V'(x) > 0 \Rightarrow 50 - 10x > 0 \Rightarrow 50 > 10x \Rightarrow x < 5$$

Άρα για x=5 έχουμε το μέγιστο όγκο και ισούται με $V(5) = 50 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 250 - 125 = 125\,dm^3$

Δ3)

α) $A_i(x_i, y_i)$ $\quad y_i = E(x_i)$ $\quad i = 1, 2, ...21$

με $5 = x_1 < x_2 < ...... < x_{14} < x_{21} = 9$

CV>10%

$\bar{x} = 8,$ $\quad 2s^2 - 5s + 2 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$s_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Αν $s = \frac{1}{2}$ τότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{8} = \frac{1}{16} < 10\%$ αδύνατο άρα $\boxed{s = 2}$

β)

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{v}\right\}$$

$$s^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{v} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{v^2} \Rightarrow s^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{v} - \left(\frac{\Sigma x_i}{v}\right)^2$$

$$s^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{v} - \bar{x}^2$$

$$4 = \frac{\Sigma x_i^2}{21} - 64 \Rightarrow 68 = \frac{\Sigma x_i^2}{21} \Rightarrow \Sigma x_i^2 = 68 \cdot 21$$

$$\bar{x}' = \frac{\Sigma x_i^2}{v} = \frac{68 \cdot 21}{21} = 68$$

Επιμέλεια:

Μυλωνίδης Στάθης , Τάνης Σάκης , Ηλιάδης Κωνσταντίνος , Σαμαρά Φράγκη