ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ :
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ251

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ273

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ150

Α4.

(α) Λ

(β) Σ

(γ) Σ

(δ) Σ

(ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0$$

Β1.
Θέτουμε όπου $z=x+yi$

Τότε $2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0 \Leftrightarrow$

$2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow$

$(2x^2+2y^2-4)+2(x-1)i=0 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}2x^2+2y^2-4=0\\ 2(x-1)=0\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2+y^2=2\\ x=1\end{array}\right| \Rightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$$

Άρα, οι λύσεις είναι $\begin{array}{ccc}(x,y)=(1,1) & ή & (x,y)=(1,-1)\\ z_1=1+i & & z_2=1-i\end{array}$

Β2.

Είναι $w=3\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left(\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^{39}=$

$=3\left(\dfrac{1+2i-1}{2}\right)^{39}=3\left(\dfrac{2i}{2}\right)^{39}=$

$=3i^{39}=3i^{4\cdot 9+3}=3\left(i^4\right)^9\cdot i^3=3\cdot 1^9\cdot i^3=3i^3=-3i$

Β3.

Είναι $|u+w|=|4z_1-z_2-i|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|u-3i|=|4(i+1)-(1-i)-i|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|u-3i|=|4+4i-1+i-i|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|u-3i|=|3+4i|\Leftrightarrow|u-3i|=\sqrt{9+16}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|u-3i|=\sqrt{25}\Leftrightarrow|u-3i|=5\overset{u=x+yi}{\Leftrightarrow}|(x+yi)-3i|=5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|x+(y-3)i|=5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-3)^2}=5\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=25$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των Μ(u) είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ρ=5.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f(x)=(x-3)^2(x-1)\; x\in R$

- $f'(x)=\left[(x-3)^2(x-1)\right]'=$

$=\left[(x-3)^2\right]'(x-1)+(x-3)^2(x-1)'=$

$=2(x-3)(x+1)+(x-3)^2=$

$=(x-3)\left[2(x-1)+(x-3)\right]=$

$=(x-3)(2x-2+x-3)=$

$=(x-3)(3x-5)$

- $f'(x)=0\Rightarrow x-3=0$ ή $3x-5=0$

$\Rightarrow x=3$ ή $x=\dfrac{5}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ		Τ.Ε		

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \frac{5}{3}]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{5}{3}, 3]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

Γ2.

Έστω ε: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η ζητούμενη εφαπτόμενη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$

ε_1: $y = 4x + 3$

Πρέπει $\varepsilon // \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1$

$\Leftrightarrow f'(x_0) = 4 \Leftrightarrow (x_0 - 3)(3x_0 - 5) = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 5x_0 - 9x_0 + 15 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 14x_0 + 11 = 0$

$\Delta = 196 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 64$

$$x_0 = \frac{14 \pm 8}{6} \begin{cases} \frac{22}{6} = \frac{11}{3} \notin Z \text{ απορ.} \\ \frac{6}{6} = 1 \in Z \text{ δεκτό} \end{cases}$$

- Για $x_0 = 1$ $f(1) = 0$, $f'(1) = 4$

Άρα $\varepsilon_2 : y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow$

$y - 0 = 4(x - 1) \Leftrightarrow$

$y = 4x - 4 \Leftrightarrow 4x - y - 4 = 0$

Γ3.

- $g(x) = (x-1)f(x)$
- $g'(x) = (x-1)'f(x) + (x-1)f'(x) \Leftrightarrow$

$g'(x) = f(x) + (x-1)(x-3)(3x-5) \Leftrightarrow$

$g'(x) = (x-3)^2(x-1) + (x-1)(x-3)(3x-5) \Leftrightarrow$

$g'(x) = (x-1)(x-3)[(x-3) + (3x-5)] \Leftrightarrow$

$g'(x) = (x-1)(x-3)(4x-8) \Leftrightarrow$

$g'(x) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$T.E$		$T.M$		$T.E$		

Άρα η g παρουσιάζει στο x_1=1 τοπικό ελάχιστο
η g παρουσιάζει στο x_2=2 τοπικό ελάχιστο
η g παρουσιάζει στο x_3=3 τοπικό ελάχιστο

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$h(x) = \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1}, \quad x \neq -1$$

Επειδή η $y = x - 2$ Π.Α της C_h στο $+\infty$ προκύπτει

ότι $\lambda = 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}$ και $\beta = -2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(h(x) - x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x^2 + x}$$

Αν $\alpha = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x+2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = 0$ απορρ.

Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Όμως } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \alpha \\ \text{και } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \alpha \end{array}\right\} \boxed{\alpha = 1}$$

Οπότε $h(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1}$

Δ2.

α) Για να είναι η y=x-2 Π.Α της C_h στο $-\infty$ πρέπει

$$\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)-x+2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x+1}-x+2\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x+1}+\frac{-x+2}{1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+2-x^2-x+2x+2}{x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x+1}=0$$

β) Για κατακόρυφη ασύμπτωτη έχουμε:

$$\lim_{x\to-1}h(x)=\begin{cases}\text{για } x>-1,\ \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2-x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[\dfrac{1}{x+1}(x^2-x+2)\right]=+\infty\\ \text{με } \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-1^+}(x^2-x+2)=4\\ \\ \text{για } x<-1,\ \lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\left[\dfrac{1}{x+1}(x^2-x+2)\right]=-\infty\\ \text{με } \lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x+1}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-1^-}(x^2-x+2)=4\end{cases}$$

Άρα η x=1 Κ.Α της C_h για κάθε $x\neq-1$.

Δ3.

Έχουμε $h(x)+\dfrac{(x+3)^4}{x}=0$ και θέλουμε να βρούμε ρίζα στο (-1,0)

$$\frac{x^2-x+2}{x+1}+\frac{(x+3)^4}{x}=0\overset{x(x+1)}{\Rightarrow}x(x^2-x+2)+(x+1)(x+3)^4=0$$

Έστω $g(x)=x(x^2-x+2)+(x+1)(x+3)^4$

- Η g συνεχής στο [-1,0] ως πράξεις συνεχών.
- $g(-1)=(-1)4+0=-4<0$

  $g(0)=0+1\cdot3^4=81>0$

Από Θ.Β υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(-1,0)$ ώστε $g(x_o)=0$

Επιμέλεια:
Μυλωνίδης Στάθης, Τάνης Σάκης, Ηλιάδης Κωνσταντίνος, Σαμαρά Φράγκη