



**σύγχρονο**

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ ( ΟΜΑΔΑ Β΄ )**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ :  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ251

**A2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ273

**A3.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ150

**A4.**

**(α)** Λ

**(β)** Σ

**(γ)** Λ

**(δ)** Σ

**(ε)** Λ

**ΘΕΜΑ Β**

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0$$

**B1.**

Θέτουμε όπου  $z = x + yi$

$$\text{Τότε } 2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x^2 + 2y^2 - 4) + 2(x-1)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ 2(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$$

Άρα, οι λύσεις είναι  $(x, y) = (1, 1)$  ή  $(x, y) = (1, -1)$   
 $z_1 = 1 + i$                        $z_2 = 1 - i$



**σύγχρονο**

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

**B2.**

$$\begin{aligned} \text{Είναι } w &= 3 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3 \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^{39} = 3 \left( \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \right)^{39} = \\ &= 3 \left( \frac{1+2i-1}{2} \right)^{39} = 3 \left( \frac{2i}{2} \right)^{39} = \\ &= 3i^{39} = 3i^{4 \cdot 9 + 3} = 3(i^4)^9 \cdot i^3 = 3 \cdot 1^9 \cdot i^3 = 3i^3 = -3i \end{aligned}$$

**B3.**

$$\begin{aligned} \text{Είναι } |u+w| &= |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |u-3i| = |4(i+1) - (1-i) - i| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |u-3i| = |4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |u-3i| = |3+4i| \Leftrightarrow |u-3i| = \sqrt{9+16} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |u-3i| = \sqrt{25} \Leftrightarrow |u-3i| = 5 \Leftrightarrow \stackrel{u=x+yi}{|(x+yi)-3i|} = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x+(y-3)i| = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 5 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2 = 25 \end{aligned}$$




Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των  $M(u)$  είναι ο κύκλος με κέντρο  $K(0,3)$  και  $\rho=5$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**

$$f(x) = (x-3)^2(x-1) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(x) &= \left[ (x-3)^2(x-1) \right]' = \\ &= \left[ (x-3)^2 \right]' (x-1) + (x-3)^2 (x-1)' = \\ &= 2(x-3)(x+1) + (x-3)^2 = \\ &= (x-3)[2(x-1) + (x-3)] = \\ &= (x-3)(2x-2+x-3) = \\ &= (x-3)(3x-5) \\ \bullet \quad f'(x) &= 0 \Rightarrow x-3=0 \text{ ή } 3x-5=0 \\ &\Rightarrow x=3 \text{ ή } x=\frac{5}{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$		3	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)					
		T.M		T.E	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, \frac{5}{3}]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[\frac{5}{3}, 3]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο  $[3, +\infty)$

## Γ2.

Έστω  $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$  η ζητούμενη εφαπτόμενη της  $C_f$  στο  $M(x_0, f(x_0))$

$\varepsilon_1: y = 4x + 3$

Πρέπει  $\varepsilon // \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1$

$\Leftrightarrow f'(x_0) = 4 \Leftrightarrow (x_0 - 3)(3x_0 - 5) = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 5x_0 - 9x_0 + 15 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 14x_0 + 11 = 0$

$\Delta = 196 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 64$

$$x_0 = \frac{14 \pm 8}{6} \begin{cases} \frac{22}{6} = \frac{11}{3} \notin \mathbb{Z} \text{ απορ.} \\ \frac{6}{6} = 1 \in \mathbb{Z} \text{ δεκτό} \end{cases}$$

- Για  $x_0 = 1$   $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = 4$

Άρα  $\varepsilon_2: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow$

$y - 0 = 4(x - 1) \Leftrightarrow$

$y = 4x - 4 \Leftrightarrow 4x - y - 4 = 0$

## Γ3.

- $g(x) = (x - 1)f(x)$

- $g'(x) = (x - 1)f'(x) + (x - 1)f'(x) \Leftrightarrow$

$g'(x) = f(x) + (x - 1)(x - 3)(3x - 5) \Leftrightarrow$

$g'(x) = (x - 3)^2(x - 1) + (x - 1)(x - 3)(3x - 5) \Leftrightarrow$

$g'(x) = (x - 1)(x - 3)[(x - 3) + (3x - 5)] \Leftrightarrow$

$g'(x) = (x - 1)(x - 3)(4x - 8) \Leftrightarrow$

$g'(x) = 4(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

•  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3$

$x$	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x-1$	-	o	+	+	+
$x-2$	-	-	o	+	+
$x-3$	-	-	-	o	+
$g'(x)$	-	+	-	+	
$g(x)$	↘	↗	↘	↗	
		<i>T.E</i>	<i>T.M</i>	<i>T.E</i>	

Άρα η  $g$  παρουσιάζει στο  $x_1=1$  τοπικό ελάχιστο  
 η  $g$  παρουσιάζει στο  $x_2=2$  τοπικό ελάχιστο  
 η  $g$  παρουσιάζει στο  $x_3=3$  τοπικό ελάχιστο

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

$$h(x) = \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x + 1}, \quad x \neq -1$$

Επειδή η  $y = x - 2$  Π.Α της  $C_h$  στο  $+\infty$  προκύπτει

ότι  $\lambda = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$  και  $\beta = -2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x^2 + x}$$

Αν  $\alpha = 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = 0$  απορρ.

Αν  $\alpha \neq 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \alpha \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \alpha \end{array} \right\} \boxed{\alpha = 1}$$

Οπότε  $h(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$

**Δ2.**

α) Για να είναι η  $y = x - 2$  Π.Α της  $C_h$  στο  $-\infty$  πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} - x + 2 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} + \frac{-x + 2}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - x + 2 - x^2 - x + 2x + 2}{x + 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 1} = 0$$

β) Για κατακόρυφη ασύμπτωτη έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \begin{cases} \text{για } x > -1, \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[ \frac{1}{x + 1} (x^2 - x + 2) \right] = +\infty \\ \text{με } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x + 1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - x + 2) = 4 \\ \text{για } x < -1, \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[ \frac{1}{x + 1} (x^2 - x + 2) \right] = -\infty \\ \text{με } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x + 1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - x + 2) = 4 \end{cases}$$

Άρα η  $x=1$  Κ.Α της  $C_h$  για κάθε  $x \neq -1$ .

**Δ3.**

Έχουμε  $h(x) + \frac{(x+3)^4}{x} = 0$  και θέλουμε να βρούμε ρίζα στο  $(-1, 0)$

$$\frac{x^2 - x + 2}{x + 1} + \frac{(x + 3)^4}{x} = 0 \Rightarrow x(x^2 - x + 2) + (x + 1)(x + 3)^4 = 0$$

Έστω  $g(x) = x(x^2 - x + 2) + (x + 1)(x + 3)^4$

- Η  $g$  συνεχής στο  $[-1, 0]$  ως πράξεις συνεχών.
- $g(-1) = (-1)4 + 0 = -4 < 0$
- $g(0) = 0 + 1 \cdot 3^4 = 81 > 0$

Από Θ.Β υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (-1, 0)$  ώστε  $g(x_0) = 0$ .

**Επιμέλεια:**

Μυλωνίδης Στάθης, Τάνης Σάκης, Ηλιάδης Κωνσταντίνος, Σαμαρά Φράγκη