ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Απόδειξη βιβλίου σελ 334-335

Α2.

Ορισμός βιβλίου σελ 246

Α3.
α) Λ
β) Σ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.
$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow$
$(z-2)(\overline{z-2})+|z-2|=2 \Leftrightarrow$
$|z-2|^2+|z-2|-2=0$

Θέτουμε $\omega=|z-2|\geq 0$
Άρα, $\omega^2+\omega-2=0$

$\Delta=1-4\cdot 1\cdot(-2)=9$
$$\omega_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} -2<0 \text{ απορρίπτεται} \\ 1>0 \text{ δεκτή} \end{cases}$$

Οπότε,

Για $\omega=1 \Leftrightarrow |z-2|=1 \overset{z=x+y_i}{\Leftrightarrow} |(x+y_i)-2|=1 \Leftrightarrow$
$|(x-2)+y_i|=1 \Leftrightarrow |(x-2)+y_i|^2=1 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2+y^2=1$
Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ=1.

Είναι,

$|z| = |(z-2)+2| \le |z-2| + 2 \Leftrightarrow$

$|z| \le 1+2 \Leftrightarrow |z| \le 3$

Β2.

Εφόσον z_1, z_2 ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ προκύπτει $z_1 = x + yi$ και $z_2 = x - yi$

$|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)| = 2 \Rightarrow$

$|y-(-y)| = 2 \Rightarrow |2y| = 2 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y \pm 1$

Από τύπους Vieta έχουμε:

$S = z_1 + z_2 = -\beta \Rightarrow 2x = -\beta$

$P = z_1 z_2 = \gamma \Rightarrow x^2 + y^2 = \gamma$

$|z_1 - 2| = 1 \Rightarrow |x + yi - 2| = 1 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 1 \left\langle \begin{matrix} y = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 1 = 1 \\ y = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 1 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + \cancel{1} = \cancel{1} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Άρα $\beta = -2x = -2 \cdot 2 = -4$

Οπότε $\gamma = x^2 + y^2 = 2^2 + 1 = 5$

Β3.

Είναι $\nu^3 + \alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_o = 0 \Rightarrow \nu^3 = -\alpha_2 \nu^2 - \alpha_1 \nu - \alpha_o \Rightarrow$

$\Rightarrow |\nu^3| = |-\alpha_2 \nu^2 - \alpha_1 \nu - \alpha_o|$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$|\nu^3| = |\alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_o| \le |\alpha_2 \nu^2| + |\alpha_1 \nu| + |\alpha_o| \le |\alpha_2||\nu|^2 + |\alpha_1||\nu| + |\alpha_o| \le 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3$

οπότε ισχύει $|\nu|^3 \le 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3$

Είναι επίσης $|\nu|^3 - 1 < |\nu|^3$ οπότε

$|\nu|^3 - 1 < |\nu|^3 \le 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3 \Rightarrow$

$|\nu|^3 - 1 < |\nu|^3 \le 3(|\nu|^2 + |\nu| + 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\nu|^3 - 1 < 3(|\nu|^2 + |\nu| + 1) \overset{:(|\nu|^2+|\nu|+1)>0}{\Rightarrow} \frac{|\nu|^3 - 1}{|\nu|^2 + |\nu| + 1} < 3 \Rightarrow \frac{(|\nu|-1)\cancel{(|\nu|^2 + |\nu| + 1)}}{\cancel{|\nu|^2 + |\nu| + 1}} < 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\nu| - 1 < 3 \Rightarrow |\nu| < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$(f(x)+x)\cdot(f'(x)+1)=x \Rightarrow$$

$$f(0)=1 \quad g(x)=x^3+3\frac{x^2}{2}-1$$

$$2(f(x)+x)\cdot(f(x)+x)'=2x \Rightarrow$$

$$\left((f(x)+x)^2\right)'=\left(x^2\right)' \Rightarrow$$

$$\left(f(x)+x\right)^2=x^2+c$$

$$\left(f(0)\right)^2=0^2+c \Rightarrow c=1$$

$$\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1$$

$$f(x)+x=\pm\sqrt{x^2+1}$$

Αν $f(x)+x=-\sqrt{x^2+1}$

Για $x=0 \quad f(0)+0=-1 \Rightarrow 1=-1$, αδύνατο

Άρα $f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x, \quad x\in\mathbb{R}$

Γ2.

$$f(g(x))=1$$

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$

$$f'(x)=(\sqrt{x^2+1}-x)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Για $x\in R$ έχουμε:

$$\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0$$

Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in R \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο R άρα είναι και «1-1»

Οπότε

$$f(g(x))=1 \Leftrightarrow f(g(x))=f(0) \overset{f\ "1-1"}{\Leftrightarrow} g(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2=0$$

Θεωρούμε

$\Phi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$

$\Phi'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$\phi'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\phi(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		T.M		T.E	

- Για $x \in A_1 = (-\infty, -1]$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } \Phi \text{ συνεχής στο } A_1 = (-\infty, -1] \\ \text{Η } \Phi \text{ γνησίως αύξουσα στο } A_1\end{array}\right\} \Rightarrow \Phi(A_1) = \left(\lim_{x\to-\infty}\Phi(x),\ f(-1)\right] = (-\infty, -1]$$

Όπου $\Phi(-1) = -2 + 3 - 2 = -1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 + 3x^2 - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

Το $0 \notin \Phi(A_1) \Rightarrow$ η $\Phi(x) = 0$ δεν έχει ρίζες στο $A_1 = (-\infty, -1]$

- Για $x \in A_2 = [-1, 0]$

Η Φ συνεχής στο $A_2 = [-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $A_2 \Leftrightarrow$

$\Phi(A_2) = [\Phi(0), \Phi(-1)] \Rightarrow \Phi(A_2) = [-2, -1]$

Το $0 \notin \Phi(A_2) \Rightarrow$ Η $\Phi(x)$ δεν έχει ρίζες στο $A_2 = [-1, 0]$

- Για $x \in A_3 = [0, +\infty)$

Η Φ συνεχής στο $A_3 = [0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $A_3 \Leftrightarrow$

$\Phi(A_3) = \left[\Phi(0),\ \lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)\right) \Rightarrow \Phi(A_2) = [-2, +\infty)$

Το $0 \in \Phi(A_3) \Rightarrow$ Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in A_3 = [0, +\infty)$ ώστε $\Phi(x_0)=0$

Η Φ γνησίως αύξουσα στο $A_3 = [0, +\infty) \Rightarrow$ Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in [0, +\infty)$ ώστε $\Phi(x_0)=0$

Άρα τελικά η $\Phi(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in [0, +\infty)$

Γ3.

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x_0$$

Έστω η $h(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt - f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot εφx$

Η f συνεχής στο R και η $x-\frac{\pi}{4}$ παραγωγίσιμη στο R άρα $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt$ παραγωγίσιμο

Ακόμη η f συνεχής άρα η $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Άρα η h συνεχής στο $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξη συνεχών

$$h(0)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \cancel{εφ0}^{0} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt > 0$$

Επειδή $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+1} > x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0 \Rightarrow$

$f(x) > 0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt > 0$

$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 - f(0)\cdot εφ\frac{\pi}{4} = -1\cdot 1 = -1 < 0$

Από ΘΒ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0\,,\,\frac{\pi}{4}\right)$ ώστε $h(x_0)=0$

ΘΕΜΑ Δ

f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Δ1.

$g(x)=\int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}dt \quad x>1 \quad \alpha>1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}=0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h} - \lim_{h\to o}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=0 \Rightarrow$$

$$5f'(1)-(-f'(1))=0 \Rightarrow 6f'(1)=0 \Rightarrow f'(1)=0$$

Είναι $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ και

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}=5\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{5h}=5\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t}=5f'(1)$

  $5h=t$

  $h\to 0 \;\; t\to 0$

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t}=-f'(1)$

  $-h=t$

  $h\to 0 \;\; t\to 0$

Για x>1 $\overset{f'\text{γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα

$0<x<1 \overset{f'\text{γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα

Για x=1 $\Rightarrow f'(1)=0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$

Άρα η f παρουσιάζει στο $x_o=1$ ολικό ελάχιστο.

Δ2.

Η $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ συνεχής για $t>1$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων

Οπότε η g(x) παραγωγίσιμη για $x>1$ με $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$, $x>1$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$

$f(1)\le f(x)\Leftrightarrow 1\le f(x)\Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} f(x)-1\ge 0 \\ x-1>0 \end{array}\right\}\Rightarrow g'(x)\ge 0$

Η ισότητα θα ισχύει για x=1 . Άρα για $x>1\Rightarrow g'(x)>0\Rightarrow g$ γν. αύξουσα

	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$\nearrow$	

Έχουμε $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$ **(1)**. Ορίζουμε $F(x)=\int_{x}^{x+1} g(u)du \ x\in(1,+\infty)$

Η g συνεχής για x > 1 οπότε

$$F(x)=\int_{x}^{x+1} g(u)du=\int_{x}^{c} g(u)du+\int_{c}^{x+1} g(u)du=-\int_{c}^{x} g(u)du+\int_{c}^{x+1} g(u)du$$

Οπότε $F'(x)=-g(x)+g(x+1)$

Για $x<x+1 \overset{g\text{ γν. αύξ.}, x>1}{\Rightarrow} g(x)<g(x+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x+1)-g(x)>0 \Rightarrow F'(x)>0 \Rightarrow F$ γνησίως αύξουσα

Άρα η **(1)** γράφεται

$F(8x^2+5)>F(2x^4+5) \overset{F\text{γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} 8x^2+5>2x^4+5\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^4-8x^2<0 \Rightarrow 2x^2(x^2-4)<0$

Για $x>1 \Rightarrow 2x^2>0$

Άρα $x^2-4<0 \Rightarrow x^2<4 \Rightarrow |x|<2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2<x<2 \overset{x>1}{\Rightarrow} x\in(1,2)$

Δ3.

$$g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$$

$$g''(x)=\frac{f'(x)\cdot(x-1)-f(x)+1}{(x-1)^2}$$

$(x-1)^2>0$

Άρα για να είναι κυρτή πρέπει

$g''(x)>0 \Rightarrow f'(x)\cdot(x-1)-f(x)+1>0$

$f'(x)\cdot(x-1)>f(x)-1 \overset{x-1>0}{\Rightarrow}$

$f'(x)>\dfrac{f(x)-1}{x-1} \Rightarrow f'(x)>\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ **(1)**

Από Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[1,x]$ προκύπτει ότι υπάρχει

$\xi\in(1,x)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ **(2)**

Από (1) και (2) $\Rightarrow f'(x) > f'(\xi)$ όμως

$1 < \xi < x \overset{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f'(1) < f'(\xi) < f'(x)$

Άρα $f'(x) - f'(\xi) > 0$ άρα ισχύει , οπότε η g κυρτή

Α΄ τρόπος

Έχουμε $(\alpha - 1)g(x) = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha)$, $\alpha > 1$, $x > 1$

Για x=α ισχύει η ισότητα οπότε είναι ρίζα.

Έστω ότι η εξίσωση αυτή έχει και άλλη ρίζα $x_0 > 1$,

δηλαδή $(\alpha - 1)g(x_0) = (f(\alpha) - 1)(x_0 - \alpha)$ με $x_0 \neq \alpha$ και $g(\alpha) = 0$

$\dfrac{g(x_0) - g(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \dfrac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}$ (1) με $g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}$

- Αν $\alpha < x_0$

Από ΘΜΤ. υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha\ ,\ x_0)$

$g'(\xi_1) = \dfrac{g(x_0) - g(\alpha)}{x_0 - \alpha}$

Όμως $\alpha < \xi_1 < x_0 \overset{g' \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} g'(\alpha) < g'(\xi_1)$ άρα δεν ισχύει η ισότητα οπότε η (1) είναι αδύνατη.

- Αν $\alpha > x_0$

Από ΘΜΤ. υπάρχει $\xi_1 \in (x_0\ ,\ \alpha)$

$g'(\xi_1) = \dfrac{g(x_0) - g(\alpha)}{x_0 - \alpha}$

Όμως $x_0 < \xi_1 < \alpha \overset{g' \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} g'(\xi_1) < g'(\alpha)$ άρα δεν ισχύει η ισότητα οπότε η (1) είναι αδύνατη.

Β΄ τρόπος

Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο Μ(α , g(α)) είναι:

$y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha)$ $\qquad g(\alpha) = 0$

$y = \dfrac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}(x - \alpha) = \omega(x)$ $\qquad g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}$

Επειδή η g είναι κυρτή οποιαδήποτε εφαπτομένη θα βρίσκεται κάτω από την Cg εκτός από το σημείο επαφής δηλαδή:

$g(x) \geq \omega(x)$

Η ισότητα ισχύει μόνο για το σημείο επαφής δηλαδή το σημείο $M(\alpha\ ,\ g(\alpha))$.

Γ΄ τρόπος

$(\alpha - 1)g(x) = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha)$, $\alpha > 1$, $x > 1$

Οπότε $g(x) = \dfrac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}(x - \alpha)$ και $g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}$

Έστω η συνάρτηση $h(x)=g(x)-\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha)\Rightarrow h(x)=g(x)-g'(\alpha)(x-\alpha)$

Είναι $h'(x)=g'(x)-g'(\alpha)$

- Αν $x>\alpha \overset{g'\ \text{γν. αυξ.}}{\Rightarrow} g'(x)>g'(\alpha)\Rightarrow g'(x)-g'(\alpha)>0\Rightarrow h'(x)>0\Rightarrow h(x)$ γν. αύξουσα

  Άρα η $x=\alpha$ μοναδική ρίζα της h

- Αν $x<\alpha \overset{g'\ \text{γν. αυξ.}}{\Rightarrow} g'(x)<g'(\alpha)\Rightarrow g'(x)-g'(\alpha)<0\Rightarrow h'(x)<0\Rightarrow h(x)$ γν. φθίνουσα

  Άρα η $x=\alpha$ μοναδική ρίζα της h

Επιμέλεια :
Μυλωνίδης Σ. – Τάνης Σ. – Ηλιάδης Κ. – Μαργαριτέλη Ε. – Πασχαλίδου Ξ. – Σαμαρά Φ.