ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΙΟΥ 2013
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη βιβλίου σελ. 28
Α2. Ορισμός βιβλίου σελ. 14
Α3. Ορισμός βιβλίου σελ. 87
Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-1^2}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\frac{1}{(-1)(\sqrt{1}+1)}=-\frac{1}{2}$$

Άρα $P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{x}{3}\ln x,\ x>0$

$f'(x)=\frac{1}{3}\ln x+\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{3}+\frac{1}{3}$

Ρυθμός μεταβολής της f(x) ως προς x όταν x=1:

$f'(1)=\frac{\ln 1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ άρα $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

Β2.

$$\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}\overset{P(A')=1-P(A)}{\Rightarrow}\frac{1}{3}\le 1-P(A)\le\frac{3}{4}\overset{+(-1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{3}-1\le -P(A)\le\frac{3}{4}-1\Rightarrow -\frac{2}{3}\le -P(A)\le -\frac{1}{4}\overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow}\frac{1}{4}\le P(A)\le\frac{2}{3}$$

Είναι $A=\{\omega_1,\omega_4\}$ και $B=\{\omega_1,\omega_3\}$ οπότε $A\cap B=\{\omega_1\}$

Είναι $P(A\cap B)=P(\omega_1)=\frac{1}{4}$

$A\cap B\subseteq A\Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)\Rightarrow \boxed{\frac{1}{4}\le P(A)}$ (1)

$P(B)=P(\omega_1)+P(\omega_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

Είναι $P(A\cup B)\le 1\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1\Leftrightarrow$

$P(A)+\frac{7}{12}-\frac{1}{4}\le 1\Leftrightarrow P(A)+\frac{4}{12}\le 1\Leftrightarrow P(A)\le 1-\frac{1}{3}\Leftrightarrow \boxed{P(A)\le\frac{2}{3}}$ (2)

Από (1),(2) $\Rightarrow \frac{1}{4}\le P(A)\le\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{1}{4}\le 1-P(A')\le\frac{2}{3}\Rightarrow$

$-\frac{3}{4}\le -P(A')\le -\frac{1}{3}\overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow}\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$

B3.

$P(A')=\frac{3}{4}\Rightarrow 1-P(A)=\frac{3}{4}\Rightarrow P(A)=1-\frac{3}{4}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}$

$P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_4)\Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}+P(\omega_4)\Rightarrow P(\omega_4)=0$

Ισχύει ότι $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=P(\Omega)\Rightarrow P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4}+P(\omega_2)+\frac{1}{3}+0=1\Rightarrow P(\omega_2)+\frac{7}{12}=1\Rightarrow P(\omega_2)=1-\frac{7}{12}\Rightarrow P(\omega_2)=\frac{5}{12}$

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=$

(από τον απλό προσθετικό νόμο αφού $(A-B)\cap(B-A)=\emptyset$)

$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$

$=\frac{1}{4}+\frac{7}{12}-2\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{7}{12}-\frac{2}{4}=\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}-\frac{3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-P\left[(A\cup B)'\right]=$

$=1-P(A)-\left(1-P(A\cup B)\right)=\cancel{1}-P(A)-\cancel{1}+P(A\cup B)=$

$=-P(A)+P(A\cup B)\overset{*}{=}-\frac{1}{4}+\frac{7}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

* $A\cup B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\}$

$P(A\cup B)=P(\omega_1)+P(\omega_3)+P(\omega_4)$

$P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+0\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{7}{12}$

ΘΕΜΑ Γ

$\kappa = 4$ κλάσεις , $x_{min} = 50$, $x_4 = 85$, $f_4 = 2f_3$, $\delta = 75$, $\overline{x} = 74$.

Γ1.
Οι κλάσεις θα είναι της μορφής:
[α , α+c)
[α+c , α+2c)
[α+2c , α+3c)
[α+3c , α+4c)

Είναι $x_{min} = \alpha = 50$

Είναι $x_4 = \frac{(\alpha+3c)+(\alpha+4c)}{2} \Leftrightarrow x_4 = \frac{2\alpha+7c}{2} \Leftrightarrow 85 = \frac{2\cdot 50+7c}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 170 = 100+7c \Leftrightarrow 7c = 70 \Leftrightarrow \boxed{c=10}$

Γ2.

- $f_1+f_2+f_3+f_4=1 \overset{f_4=2f_3}{\Leftrightarrow} f_1+f_2+f_3+2f_3=1 \Leftrightarrow f_1+f_2+3f_3=1$ **(1)**

- $\overline{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i f_i \Leftrightarrow \overline{x} = x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4 \Leftrightarrow 74 = 55f_1+65f_2+75f_3+85f_4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 74 = 55f_1+65f_2+75f_3+85\cdot(2f_3) \Leftrightarrow 74 = 55f_1+65f_2+75f_3+170f_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 74 = 55f_1+65f_2+245f_3$ **(2)**

- Είναι $\delta = 75$ Άρα $f_1+f_2+\frac{f_3}{2} = \frac{50}{100} \Leftrightarrow f_1+f_2+\frac{f_3}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f_1+2f_2+f_3=1$ **(3)**

Λύνουμε το σύστημα των **(1) , (2) , (3)**

$$\left.\begin{array}{l} f_1+f_2+3f_3=1 \\ 55f_1+65f_2+245f_3=74 \\ 2f_1+2f_2+f_3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1+f_2=1-3f_3 \\ 55f_1+65f_2+245f_3=74 \\ 2(f_1+f_2)+f_3=1 \end{array}\right\}$$

$2(f_1+f_2)+f_3=1 \Leftrightarrow 2(1-3f_3)+f_3=1 \Leftrightarrow 2-6f_3+f_3=1 \Leftrightarrow 5f_3=1 \Leftrightarrow f_3=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \boxed{f_3=0,2}$

Από **(1)** έχουμε :
$f_1+f_2+3f_3=1 \Leftrightarrow f_1+f_2+3\cdot 0,2=1 \Leftrightarrow f_1+f_2+0,6=1 \Leftrightarrow f_1+f_2=0,4 \Leftrightarrow f_1=0,4-f_2$ **(4)**

Από **(2)** έχουμε:

$55f_1+65f_2+245f_3=74 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} 55(0,4-f_2)+65f_2+245\cdot 0,2=74 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 22-55f_2+65f_2+49=74 \Leftrightarrow 10f_2=3 \Leftrightarrow \boxed{f_2=0,3}$

Από **(4)** έχουμε $f_1=0,4-0,3 \Leftrightarrow \boxed{f_1=0,1}$

Από **(1)** έχουμε $f_1+f_2+3f_3=1 \Leftrightarrow 0,1+0,3+0,2+f_4=1 \Leftrightarrow 0,6+f_4=1 \Leftrightarrow \boxed{f_4=0,4}$

Οπότε ο πίνακας γίνεται :

[,)	x_i	f_i
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4
Σύνολο	----	1

Γ3.

Είναι $f_1=\dfrac{v_1}{v} \Rightarrow v_1=f_1\cdot v \Rightarrow v_1=0,1\cdot v$

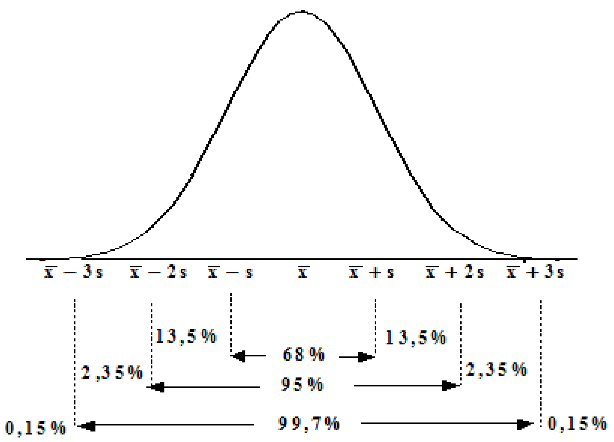
Ομοίως : $v_2=0,3\cdot v$ και $v_3=0,2\cdot v$

Οπότε $\bar{x}=\dfrac{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3}{v_1+v_2+v_3} \Leftrightarrow \bar{x}=\dfrac{55v_1+65v_2+75v_3}{v_1+v_2+v_3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{x}=\dfrac{55\cdot 0,1\cdot v+65\cdot 0,3\cdot v+75\cdot 0,2\cdot v}{0,1\cdot v+0,3\cdot v+0,2\cdot v} \Leftrightarrow \bar{x}=\dfrac{\cancel{v}(55\cdot 0,1+65\cdot 0,3+75\cdot 0,2)}{0,6\cdot \cancel{v}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{x}=\dfrac{5,5+19,5+15}{0,6} \Leftrightarrow \bar{x}=\dfrac{40}{0,6} \Leftrightarrow \bar{x}=\dfrac{20}{0,3} \Leftrightarrow \bar{x}=\dfrac{200}{3}$

Γ4.
Η κανονική κατανομή είναι :



$$\left.\begin{array}{l}\text{Το } 2,5\% \text{ των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον } 74\\ \text{Το } 2,5\% \text{ των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον } \bar{x}+2s\end{array}\right\}\Rightarrow \bar{x}+2s=74$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Το } 16\% \text{ των παρατηρήσεων είναι το πολύ } 68\\ \text{Το } 16\% \text{ των παρατηρήσεων είναι το πολύ } \bar{x}-s\end{array}\right\}\Rightarrow \bar{x}-s=68$$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}-s=68\end{array}\right\}\underset{\cdot(-1)}{\Rightarrow}\begin{cases}\cancel{\bar{x}}+2s=74\\ \cancel{-\bar{x}}+s=-68 \ \oplus\end{cases}$$

$$3s=6\Rightarrow \boxed{s=2}$$

Οπότε $\bar{x}-s=68\Rightarrow \bar{x}-2=68\Rightarrow \boxed{\bar{x}=70}$

$$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}\cdot 100=\frac{2}{70}\cdot 100=\frac{1}{35}\cdot 100\Rightarrow \boxed{CV=2,86\%}$$

Άρα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=x\ln x+\kappa \ , \ x>0$

Δ1.

Η εφαπτομένη (ε) έχει μορφή $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$

$A(1, f(1))\in C_f \Rightarrow y=f(1)\Rightarrow y=1\cdot 0+\kappa\Rightarrow y=\kappa$

Είναι $f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$

Οπότε $\lambda=f'(1)=1$

Για $x=1$ στην (ε) είναι $y=1\cdot 1+\beta\Rightarrow \kappa=1+\beta\Rightarrow \beta=\kappa-1$

Οπότε η εφαπτομένη στο $A(1, f(1))$ είναι $\varepsilon: y=x+\kappa-1$

Σημείο τομής με τον x΄x

Για $y=0$

$0=x+\kappa-1\Rightarrow x=1-\kappa$

Άρα το σημείο $A(1-\kappa\ ,\ 0)$

Σημείο τομής με τον y΄y

Για $x=0$

$y=0+\kappa-1\Rightarrow y=\kappa-1$

Άρα το σημείο $B(0\ ,\ \kappa-1)$

Ισχύει ότι $E<2\Rightarrow \frac{1}{2}(OA)(OB)<2 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} (OA)(OB)<4\Rightarrow |1-\kappa|\cdot|\kappa-1|<4$

Είναι $\kappa>1\Rightarrow \kappa-1>0$ οπότε $|\kappa-1|=\kappa-1$ και $\kappa>1\Rightarrow 1-\kappa<0$ οπότε $|1-\kappa|=\kappa-1$

Άρα είναι $(\kappa-1)\cdot(\kappa-1)<4 \Rightarrow (\kappa-1)^2<4 \Rightarrow \sqrt{(\kappa-1)^2}<\sqrt{4} \Rightarrow |\kappa-1|<2 \overset{\kappa-1>0}{\Rightarrow} \kappa-1<2 \Rightarrow \kappa<3$

$$\left.\begin{matrix}\kappa<3 \text{ και } \kappa>1\\ \kappa \text{ ακέραιος}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \kappa=2$$

Δ2.

α)

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots\ldots, & x_{50} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ y_1, & y_2, & \ldots\ldots, & y_{50} \end{matrix}$$

Η εφαπτομένη είναι $\varepsilon: y=x+\kappa-1 \Rightarrow y=x+2-1 \Rightarrow y=x+1$

Για κάθε x_i , $i=1, \ldots\ldots, 50$ ισχύει $y_i=x_i+1 \Rightarrow x_i=y_i-1$
Οπότε με βάση εφαρμογή του σχολικού βιβλίου προκύπτει

$$\left.\begin{matrix}\bar{y}=31\\ \bar{x}=\bar{y}-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{x}=31-1 \Rightarrow \bar{x}=30$$

β)

$$\begin{matrix} x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & x_{20}, & x_{21}, \ldots\ldots\ldots\ldots, & x_{35}, & x_{36}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & x_{50} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ z_1=x_1+3, \ldots, & z_{20}=x_{20}+3 & z_{21}=x_{21}, \ldots\ldots, & z_{35}=x_{35}, & z_{36}=x_{36}-\lambda, \ldots, & z_{50}=x_{50}-\lambda \end{matrix}$$

Είναι $\bar{x}'=\dfrac{z_1+\ldots\ldots+z_{50}}{50} \Leftrightarrow \bar{x}'=\dfrac{x_1+3+\ \ldots\ +x_{20}+3+x_{21}+\ldots+x_{35}+x_{36}-\lambda+\ \ldots\ +x_{50}-\lambda}{50} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bar{x}'=\frac{x_1+\ldots+x_{50}+20\cdot 3+15\cdot(-\lambda)}{50} \Leftrightarrow 31=\frac{x_1+\ldots+x_{50}+60-15\lambda}{50} \qquad \mathbf{(1)}$$

Ισχύει ότι $\bar{x}=\dfrac{x_1+\ldots+x_{50}}{50} \Leftrightarrow x_1+\ldots+x_{50}=50\cdot 30 \Leftrightarrow x_1+\ldots+x_{50}=1500$

Από **(1)** έχουμε $31\cdot 50=1500+60-15\lambda \Leftrightarrow 1550=1500+60-15\lambda \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 15\lambda=1560-1550 \Leftrightarrow 15\lambda=10 \Leftrightarrow \lambda=\frac{10}{15} \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$$

Δ3.

Ισχύει ότι $\dfrac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$, $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma=e^7$ και $f(x)=x\ln x+2$

$f(\alpha) = \alpha \ln\alpha + 2 = \ln\alpha^{\alpha} + 2$
$f(\beta) = \beta \ln\beta + 2 = \ln\beta^{\beta} + 2$
$f(\gamma) = \gamma \ln\gamma + 2 = \ln\gamma^{\gamma} + 2$
$f(e) = e\ln e + 2 = e + 2$

Είναι $f'(x) = \ln x + 1$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1 = \cancel{\ln 1}^{0} - \ln e + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f παρουσιάζει στο $x_0 = \frac{1}{e}$ ολικό ελάχιστο με τιμή $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e} > 0$

Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f\left(\frac{1}{e}\right) \le f(x) \Rightarrow 2 - \frac{1}{e} \le f(x) \Rightarrow f(x) > 0 \quad \textbf{(1)}$$

Για $x > \frac{1}{e}$ η f είναι γνησίως αύξουσα και από την **(1)** προκύπτει

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

Οπότε το εύρος είναι $R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2 - 0 = e + 2$

Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} =$

$$= \frac{\ln\alpha^{\alpha} + 2 + \ln\beta^{\beta} + 2 + \ln\gamma^{\gamma} + 2 + e + 2 + 0}{5} =$$

$$= \frac{\ln\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma} + 8 + e}{5} = \frac{\ln e^{7} + 8 + e}{5} = \frac{7 + 8 + e}{5} = \frac{15 + e}{5} = 3 + \frac{e}{5}$$

Δ4.

$$\Omega = \left\{ t_n \ , \ n = 1,\ 2,\ ....,\ 30 \ : \ 0 < t_1 < t_2 < .... < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} ...... < t_{30} = 1 \right\}$$

$A = \{t \in \Omega :$ εφαπτομένη της f στο $(t\,,\, f(t))$ σχηματίζει με $x'x$ οξεία γωνία$\}$

$B = \{t \in \Omega \;:\; f(t) > f'(t) + 1\}$

$f(t) = t\ln t + 2$ οπότε $f'(t) = \ln t + 1$

A) Για να σχηματίζει οξεία γωνία πρέπει $f'(t) > 0 \Rightarrow \ln t + 1 > 0 \Rightarrow \ln t > -1 \Rightarrow t > e^{-1} \Rightarrow t > \dfrac{1}{e}$

Άρα $A = \{t_{11}\;, \ldots\ldots\;,\; t_{30}\}$ οπότε $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{20}{30}$

B)

$f(t) > f'(t) + 1$

$t\ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Rightarrow t\ln t - \ln t > 0 \Rightarrow \ln t \cdot (t-1) > 0$

$$\ln t(t-1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} \ln t = 0 \Rightarrow t = 1 \\ \text{ή} \\ t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right.$$

	0	1	
$\ln t$	$-$	0	$+$
$t-1$	$-$	0	$+$
Γιν	$+$	0	$+$

Άρα $t \neq 1$ οπότε $B = \{t_1\,, \ldots\ldots\ldots,\; t_{29}\}$ και $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{29}{30}$

Οπότε $A \cap B = \{t_{11}, \ldots\ldots\;,\; t_{29}\}$ άρα $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{19}{30}$

Επιμέλεια
Μυλωνίδης Σ. - Τάνης Σ. - Ηλιάδης Κ. - Μαργαριτέλη Ε. - Πασχαλίδου Ξ. - Σαμαρά Φ.