



# σύγχρονο

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΕΜΠΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ Ε.Π.Α.Λ.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.**

Θεωρία από σχολικό βιβλίο σελ. 234

**A2.**

$\alpha \rightarrow \Sigma$

$\beta \rightarrow \Sigma$

$\gamma \rightarrow \Lambda$

$\delta \rightarrow \Lambda$

$\varepsilon \rightarrow \Sigma$

**A3.**

$$\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x \, dx = [-\sigma \nu x]_{\alpha}^{\beta} = -\sigma \nu \beta + \sigma \nu \alpha = \sigma \nu \alpha - \sigma \nu \beta$$

$$\beta) (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$\gamma) (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

## ΘΕΜΑ Β

$$f(x) \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x & , \alpha \forall 0 < x \leq 1 \text{ και } \alpha \in \mathbb{R} \\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} & , \alpha \forall x > 1 \end{cases}$$

**B1.**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2 \cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2 + 0 = \alpha^2$$

**B2.**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{\sqrt{x+3}^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cancel{(x-1)} (\sqrt{x+3}+2)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x(\sqrt{x+3}+2) = 1 \cdot (\sqrt{1+3}+2) = 2+2 = 4$$

**B3.**

f συνεχής στο  $x_0=1$ , άρα ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$$\text{Είναι } \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha \pm \sqrt{4} \Rightarrow \alpha = \pm 2$$



# σύγχρονο

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**

$x_i$	$v_i$	$f_i$	$x_i \cdot v_i$
6	25	50	150
10	17	34	170
15	6	12	90
20	2	4	40
Σύνολα	50	100	450

Είναι  $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \Rightarrow 25 + 17 + 6 + 2 = v \Rightarrow v = 50$

$$f_1 = \frac{25}{50} = \frac{50}{100} = 50\%$$

$$f_2 = \frac{17}{50} = \frac{34}{100} = 34\%$$

$$f_3 = \frac{6}{50} = \frac{12}{100} = 12\%$$

$$f_4 = \frac{2}{50} = \frac{4}{100} = 4\%$$

**Γ2.**

$$\text{Είναι } \bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4}{v} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} = \frac{450}{50} = 9$$

**Γ3.**

Το πολύ 1000 € έχουν  $f_1 + f_2 = 50 + 34 = 84\%$

**Γ4.**

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 v_1 + (x_2 - \bar{x})^2 v_2 + (x_3 - \bar{x})^2 v_3 + (x_4 - \bar{x})^2 v_4}{v} =$$

$$= \frac{(6-9)^2 \cdot 25 + (10-9)^2 \cdot 17 + (15-9)^2 \cdot 6 + (20-9)^2 \cdot 2}{50} =$$

$$= \frac{9 \cdot 25 + 1 \cdot 17 + 36 \cdot 6 + 121 \cdot 2}{50} = \frac{225 + 17 + 216 + 242}{50} = \frac{700}{50} = 14$$

**ΘΕΜΑ Δ**

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+\alpha) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**Δ1.**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot (x-2)^2 \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot 1 \\ &= (x-2)[2 \cdot (x+\alpha) + x-2] = \\ &= (x-2)[2x+2\alpha+x-2] = (x-2)(3x+2\alpha-2) \end{aligned}$$

**Δ2.**

Εφόσον η  $f$  έχει ακρότατο στο  $x_0=4$  έχουμε





$$\begin{aligned} f'(4) = 0 &\Rightarrow (4-2)(3 \cdot 4 + 2\alpha - 2) = 0 \\ 2(10 + 2\alpha) = 0 &\Rightarrow 10 + 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = -10 \Rightarrow \alpha = -5 \end{aligned}$$

**Δ3.**

Για  $\alpha = -5$

$$f'(x) = (x-2)(3x-12)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(3x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ 3x-12=0 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
		T.M	T.E		

Η  $f$  στο  $(-\infty, 2]$  είναι γνησίως αύξουσα

Η  $f$  στο  $[2, 4]$  είναι γνησίως φθίνουσα

Η  $f$  στο  $[4, +\infty)$  είναι γνησίως αύξουσα

Η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0=2$  τοπικό μέγιστο με τιμή  $f(2) = 0$

Η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0=4$  τοπικό ελάχιστο με τιμή  $f(4) = (4-2)^2(4-5) = 2^2 \cdot (-1) = -4$

**Δ4.**

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 3x^2 - 12x \\ h(x) = 6x - 24 \end{array} \right\} g(x) = h(x) \Rightarrow 3x^2 - 12x = 6x - 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (+8) = 36 - 32 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 \\ \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

Το εμβαδόν είναι  $E = \int_2^4 |g(x) - h(x)| dx$

Έχουμε :

$$g(x) - h(x) = 3x^2 - 12x - 6x + 24 = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8)$$

$$g(x) - h(x) > 0 \Rightarrow 3(x^2 - 6x + 8) > 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 > 0$$

	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$x^2 - 6x + 8$	+	0	-	+

Άρα στο  $[2, 4]$  η  $g(x) - h(x) < 0$  (1)

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_2^4 |g(x) - h(x)| dx \stackrel{(1)}{=} \int_2^4 (h(x) - g(x)) dx = \int_2^4 (6x - 24 - 3x^2 + 12x) dx = \\ &= \int_2^4 (-3x^2 + 18x - 24) dx = \left[ -x^3 + 9x^2 - 24x \right]_2^4 = \\ &= (-4^3 + 9 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4) - (-2^3 + 9 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2) = \\ &= (-64 + 144 - 96) - (-8 + 36 - 48) = \\ &= -16 + 20 = 4 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

**Επιμέλεια : Μυλωνίδης Σ. – Τάνης Σ. – Ηλιάδης Κ. – Σαμαρά Φ.**